

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

4. Band, Heft 8 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 337—384

Algebra und Zahlentheorie.

● Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. v. Robert Fricke †, Emmy Noether u. Øystein Ore. Bd. 3. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1932. 508 S. RM. 41.40.

Der Band bringt zunächst vollständig das XI. Supplement der IV. Auflage der Dirichlet-Dedekindschen Vorlesungen über Zahlentheorie; aus dem entsprechenden Stück der II. und III. Auflage dieses Werkes sowie der den gleichen Gegenstand behandelnden Abhandlung „Sur la théorie des nombres entiers algébriques“ wurden lediglich diejenigen Teile abgedruckt, die Dedekind in jene letzte Darstellung nicht übernommen hat. E. Noether berichtet in einer ausführlichen Erläuterung über die in diesen vier Schriften zutage tretenden verschiedenen Grundauffassungen und stellt den Anschluß an die neuere Entwicklung her. Es folgen die beiden Schriften „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ und „Was sind und was sollen die Zahlen?“, ebenfalls mit Erläuterungen von E. Noether. Die nächsten Nummern bringen Vorworte und Voranzeigen zu den verschiedenen Auflagen der Zahlentheorie-Vorlesungen, eine Anzeige der I. Auflage von Riemanns *Gesammelten Werken* sowie eine von Ore kommentierte Besprechung und Kritik des Buches von P. Bachmann, „Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie“. Aus dem Nachlaß ist die Habilitationsrede aus dem Jahre 1854 abgedruckt. Von besonderer Bedeutung sind die „Gruppenstudien“ der Jahre 1855—1858: es wird die Frage nach den verschiedenen Gruppen von fester Ordnung angegriffen, insbesondere die Quaternionengruppe studiert; dann folgt unter „Äquivalenz von Gruppen“ eine erstaunlich scharfe Darstellung des heute so genannten Homomorphiesatzes; ferner findet man den nach Frobenius benannten Satz über die Existenz von Gruppenelementen von Primzahlordnung für solche Primzahlen p , die in der Gruppenordnung aufgehen, sowie den Beweis für die Auflösbarkeit der Gruppen von Primzahlpotenzgrad; schließlich wird noch das Problem der gegenseitigen Reduktion von Körpern behandelt. Unter „Ähnliche Abbildung und ähnliche Systeme“ findet sich ein aus dem Jahr 1887 stammender, von Zermelo 1908 wiederentdeckter Beweis des Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes (1897); zu den Erläuterungen hat F. Bernstein persönliche Erinnerungen beigetragen. „Zweite Definition des Endlichen und Unendlichen“ (1889) bringt die im Vorwort zur II. Auflage von „Was sind und was sollen die Zahlen?“ erwähnte Definition eines endlichen Systems und die Ableitung seiner ersten Eigenschaften. Historisch ist sie die erste, die eine Ableitung aller Eigenschaften des Endlichen ohne Benutzung des Auswahlaxioms ermöglicht. Wie aus einem in den Erläuterungen abgedruckten Brief D.s an H. Weber hervorgeht, glaubt er noch zum Nachweis der Äquivalenz der beiden Definitionen die volle in „Was sind und was sollen die Zahlen?“ entwickelte Theorie der natürlichen Zahlen zu benötigen; J. Cavaillès, Paris, hingegen wird in einer in *Fundam. Math.* 19 erscheinenden Note zeigen, wie man in weiterem Verfolg des in dem Dedekindschen Nachlaßstück beschrittenen Weges das Prinzip der vollständigen Induktion und damit die andere Definition des Endlichen direkt gewinnt. Es folgen Stücke aus Briefen an Minkowski, Lipschitz, H. Weber. Die Mitteilung an Minkowski betrifft einen von D. gefundenen Beweis des Minkowskischen Linearformensatzes, der mit allgemeineren Schlüssen arbeitet als der von Minkowski in seiner „Geometrie der Zahlen“ gebrachte. Stärkstes Interesse erregen die Briefe an R. Lipschitz und H. Weber. Die ersten, aus dem Jahr 1876, bringen zunächst Verhandlungen wegen der Abfassung der später im *Bull. Sci. math.* veröffentlichten Abhandlung „Sur la théorie des nombres entiers algébriques“, deren Führung im Auftrag der Herausgeber jener Zeitschrift offenbar Lipschitz übernommen hatte. Weiterhin entspinnt sich eine ausgedehnte Auseinandersetzung über die Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, die mit geradezu erschütternder Deutlichkeit zeigt, mit welchen Schwierigkeiten des Verständnisses D.s Theorie der reellen Zahlen selbst bei angesehenen zeitgenössischen Mathematikern zu kämpfen hatte. Dies Thema, vor allem seine Gestaltung im Schulunterricht, bildet auch den Inhalt einiger Briefe an H. Weber aus dem Jahre 1878; andere betreffen den Abschluß der Herausgabe von Riemanns *Werken* und die Theorie der algebraischen Funktionen. Den Abschluß des Bandes bildet ein im *J. reine angew. Math.* 58 publizierter Zusatz zu einer Dirichletschen Arbeit und ein vollständiges von D. selbstverfaßtes Verzeichnis seiner Schriften.

Grell (Jena).

Lees, A.: An extension of determinants. *Math. Gaz.* 16, 192—194 (1932).

Kennedy, E. C.: A new method of solving algebraic equations of non-integral degree. Tôhoku Math. J. **35**, 304—305 (1932).

Gemeint sind Gleichungen der Form $x^a + x^b + x^c + \dots = N$, in denen die Exponenten a, b, c, \dots keine natürlichen Zahlen zu sein brauchen. Das Verfahren ist im wesentlichen die Newtonsche Näherungsmethode. *L. Schrutka* (Wien).

Cipolla, Michele: Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra. Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 144—154 (1932).

Let A be a matrix of order n , and $f(z)$ a multiple-valued function regular at each characteristic root ϱ_i of A . Let $A = PCP^{-1}$, $C = C_1 + C_2 + \dots + C_p$, C_i of order n_i ,

$$C_i = \begin{vmatrix} \varrho_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varrho_i \end{vmatrix}, \quad f(C_i) = \begin{vmatrix} f(\varrho_i) & f'(\varrho_i) & \dots & f^{(n_i-1)}(\varrho_i)/(n_i-1)! \\ 0 & f(\varrho_i) & \dots & f^{(n_i-2)}(\varrho_i)/(n_i-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\varrho_i) \end{vmatrix}.$$

A primitive matrix function is defined as $f(C) = f(C_1) + f(C_2) + \dots + f(C_p)$ where a different determination of $f(z)$ may be used for each $f(C_i)$. The general analytic matrix function is defined to be $f(A) = Pf(C)P^{-1}$ where P is any matrix such that $A = PCP^{-1}$. If the same determination for $f(z)$ is used for each $f(C_i)$, then $f(A)$ is a principal value. If the expression obtained by substituting A for z in $f(z)$ has meaning as a matrix, it is a principal value of $f(A)$. — This definition reduces to that of Fantappiè [C. R. Acad. Sci., Paris **186**, 619—621 (1928)] in the case of a uniform function regular in a region containing the ϱ_i , and satisfies his four requirements. Cartan's definition [communicated to Giorgi, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI 8, 3—8 (1928)] gives only principal values of $f(A)$, but the author shows how this may be modified to give all values. The existence of values of $f(A)$ in a given field is discussed.

MacDuffee (Columbus).

Verriest, G.: Sur les équations dont le groupe de Galois par rapport à un corps donné est imprimitif. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **52**, 68—69 (1932).

Neuer Beweis des bekannten Satzes, daß bei Gleichungen mit imprimitiver Gruppe der Körper, der durch Adjunktion einer Wurzel entsteht, einen echten Unterkörper besitzt. *van der Waerden* (Leipzig).

Specht, Wilhelm: Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe. (Schriften d. math. Sem. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin. Hrsg. v. L. Bieberbach, R. von Mises, E. Schmidt u. I. Schur. Bd. 1, H. 1.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. 32 S.

Ersetzt man in einer Permutationsgruppe in den Matrizen, die die Permutationen darstellen, die Einsen auf alle möglichen Arten durch beliebige Elemente einer abstrakten Gruppe \mathfrak{G} der Ordnung g , so bildet die so entstehende Gesamtheit von Symbolen bei formaler Multiplikation der Matrizen eine Gruppe, deren Einheitselement man erhält, wenn man in der Einheitsmatrix die Diagonalelemente durch das Einheitselement von \mathfrak{G} ersetzt. Ist die Permutationsgruppe die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n , so erhält man so eine Gruppe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{G})$ der Ordnung $n! \cdot g^n$, deren irreduzible Darstellungen untersucht werden. Es werden die Klassen ähnlicher Elemente charakterisiert (ihre Anzahl ergibt sich zu $\sum z(n_1)z(n_2)\dots z(n_k)$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, $n_i \geq 0$, wobei k bzw. $z(n_i)$ die Anzahl der Klassen in \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{S}_{n_i} ist), und die Charaktere der irreduziblen Darstellungen werden aus denen von \mathfrak{G} und aus denen der Gruppen \mathfrak{S}_m mit $m \leq n$ konstruiert unter Zugrundelegung einer von I. Schur herrührenden Behandlung für die Darstellungen der \mathfrak{S}_m . (Man vgl. etwa die Dissertation, Berlin 1901, oder S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1908**, 664.) *Magnus* (Göttingen).

Baer, Reinhold, und Friedrich Levi: Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen. (Beitr. z. Algebra Nr. 18.) S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. Abh. **2**, 3—12 (1932).

Die Gruppenaxiome werden gespalten in drei Existenz-, drei Eindeutigkeits- und ein Assoziativaxiom, welch letzteres möglichst von Existenz- und Eindeutigkeits-

aussagen frei ist. Ein Axiomensystem heißt irreduzibel, wenn es vollständig ist, wenn aber kein echtes Teilsystem vollständig ist. Es werden alle möglichen irreduzibeln Axiomensysteme aufgestellt; sie müssen alle das Assoziativaxiom enthalten, aber immer nur einen Teil der übrigen. Dagegen sind die übrigen Axiome unabhängig für Bereiche, in denen das Assoziativaxiom nicht erfüllt ist. *E. Noether* (Göttingen).

Krull, Wolfgang: Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. (Beitr. z. Algebra Nr. 19.) S.-B. Heidelberg, Akad. Wiss. Abh. 2, 13—38 (1932).

Verf. gibt eine neue, stark vereinfachte und das Eindringen sehr erleichternde Darstellung der wichtigen Steinitzschen Untersuchungen über Matrizen und Linearformenmoduln mit ganzen algebraischen Zahlen als Koeffizienten. Und zwar wird die Reduktion der Matrizen auf die Elementarteiler-Normalform vermöge „elementarer Umformungen“ erbracht. Im Gegensatz zum rationalen Fall zerfällt die Matrix hier in zweireihige vom Rang eins, die neben dem Elementarteiler noch eine Idealklasse bestimmen. Invariant ist das Produkt dieser Idealklassen, die „Klasse der Matrix“; es läßt sich erreichen, daß dies die Klasse eines zweireihigen Bestandteils wird, den übrigen die Einsklasse entspricht. — Bei der Anwendung auf die Modultheorie wird diese Idealklasse neben dem Rang charakteristisch für die „Grundmoduln“, während die Elementarteiler die Moduln mit gleichem Grundmodul individualisieren. Die direkte Summenzerlegung eines Grundmoduls in direkt unzerlegbare ist nicht eindeutig im Sinne der Operatorisomorphie; damit war also schon von Steinitz gezeigt, daß der „Krull-Schmidtsche Satz“ bei Voraussetzung allein des Obergruppen-Kettensatzes seine allgemeine Gültigkeit verliert. Die Krullsche Normalform ist von der Steinitzschen verschieden; Steinitz hatte aus seiner noch gefolgert, daß es soviel Modulklassen — Klassen operatorisomorpher Moduln — gibt wie Idealklassen (wiedergegeben bei I. Schur, Math. Ann. 71). Ein Teil der Sätze über Modulklassen findet sich schon bei Dedekind, und zwar lassen sich, entgegen einer Bemerkung von der Referentin (Dedekind, Gesammelte Werke 2, 86) auch die von Dedekind anders eingeführten Moduln als Linearformenmoduln auffassen, also der Steinitzschen Theorie unterordnen; die Dedekindschen Methoden behalten ihre selbständige Bedeutung. *E. Noether*.

Fueter, Rud.: Formes d'Hermite, groupe de Picard et théorie des idéaux de quaternions. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2009—2011 (1932).

Zwischen den Klassen äquivalenter Linksideale in gewissen Quaternionenringen und gewissen Klassen äquivalenter binärer Hermitescher Formen besteht eine eindeutige Zuordnung derart, daß die zugeordnete Form einer Klasse die Normen aller Ideale dieser Klasse darstellt. *van der Waerden* (Leipzig).

Zyliński, E.: Zur Begründung der Idealtheorie. C. R. Soc. Sci. Varsovie 24, 87 bis 92 (1932).

Ebenso wie man die reellen Zahlen durch Klasseneinteilung — nämlich von Fundamentalfolgen — definieren kann, so auch die Ideale in algebraischen Zahlkörpern (oder beliebigen Ringen). Man braucht nur äquivalente Idealbasen in eine Klasse zusammenzufassen, d. h. in der Menge aller endlichen Systeme ganzer Zahlen des Körpers solche Systeme äquivalent zu nennen, die sich gegenseitig linear mit ganzen Körperzahlen als Koeffizienten ausdrücken lassen. Bei beliebigen Ringen muß man natürlich auch unendliche Erzeugendensysteme zulassen. *E. Noether* (Göttingen).

Herbrand, Jacques: Une propriété du discriminant des corps algébriques. Ann. École norm., III. s. 49, 105—112 (1932).

Verf. zeigt, daß die Diskriminante eines metazyklischen Relativkörpers K/k von der Form $a^2(\alpha)$ ist, wo α im Strahl nach einem (verallgemeinerten) Ideal \tilde{b} liegt, das aus solchen Primteilern von (4) und unendlichen Primstellen zusammengesetzt ist, die nicht im Führer von K/k aufgehen; für die unendlichen Primstellen des Führers wird α negativ, wenn der Grad von K/k durch zwei, aber nicht durch vier teilbar. — Dieser Satz umfaßt, allerdings nur für den metazyklischen Spezialfall, für den rationalen

Grundkörper einen bekannten Satz von Stickelberger-Schur, bei beliebigem k einen Satz von Hecke, daß die Diskriminante im Quadrat einer Idealklasse liegt; demnach ist die Gültigkeit des Satzes vermutlich unabhängig von der Beschränkung aufs Metazyklische. Der Beweis wird durch Induktionsschluß auf den Spezialfall K/k zyklisch von Primzahlgrad l reduziert, hier wieder, da die Diskriminante $(l-1)$ te Potenz, auf den Fall $l=2$. Dieser letztere Beweis wird erbracht durch Betrachtung aller quadratischen Relativkörper, deren Führer in \tilde{h} aufgeht, und durch Bestimmung der Klasse nach \tilde{h} , zu welcher der Führer von K/k gehört. *E. Noether* (Göttingen).

Prüfer, Heinz: Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. *J. reine angew. Math.* **168**, 1–36 (1932).

Durch eine axiomatische Definition des Idealbegriffs gelangt der Verf. zu einer Verallgemeinerung der Dedekindschen Ideale: Sind a_1, a_2, \dots, a_n endlich viele Elemente eines Körpers, so heißt die Menge $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein Ideal, wenn sie die folgenden fünf Axiome erfüllt: 1. a enthält a_1, a_2, \dots, a_n . 2. Jedes Ideal, das die Elemente a_1, a_2, \dots, a_n enthält, umfaßt a . 3. Das durch ein einziges Element erzeugte Ideal stimmt mit den Vielfachen dieses Elementes überein. 4. Ist a in a enthalten, so $a \cdot b$ in $(a_1 b, a_2 b, \dots, a_n b)$. 5. Die Menge (a, b) enthält das Element $a + b$. Es werden nun jene Eigenschaften dieser Idealsysteme untersucht, die notwendig gelten müssen, damit in den Körpern ähnliche Gesetzmäßigkeiten bestehen wie etwa im rationalen Zahlkörper. Verf. legt als größten gemeinsamen Teiler dasjenige Element zugrunde, das Vielfache aller gemeinsamen Teiler ist. In einem vollständigen Körper, d. h. in einem Körper, der zu je zwei Elementen den größten gemeinsamen Teiler enthält, gilt dann die folgende Vorstufe zur eindeutigen Zerlegbarkeit: Ist ein ganzes Element auf zwei Arten als Produkt ganzer Elemente darstellbar, so gibt es eine weitere Darstellung, aus welcher die gegebenen durch Zusammenfassung von Faktoren hervorgehen. Es handelt sich nun darum, die nicht vollständigen Körper geeignet zu ergänzen, um die Teilbarkeitsverhältnisse auch dort übersichtlich zu gestalten. Dazu wird der Begriff der „multiplikativ vollständigen“ Menge eingeführt. Das ist eine Menge, die bestimmten multiplikativen Abgeschlossenheitsaxiomen genügt und in der gewisse Elemente als „ganz“ ausgezeichnet sind. Insbesondere besitzen je zwei Elemente einen größten gemeinsamen Teiler. Ein wichtiger Grund für die Einführung der Ideale ist die Tatsache, daß ein Idealsystem eines Körpers eine multiplikativ vollständige Menge bilden kann, ohne daß der Körper vollständig ist. Ein Idealsystem ist in einem Körper dann und nur dann multiplikativ vollständig, wenn für je zwei Ideale a, b des Systems aus $a \supseteq b$ folgt, daß a Teiler von b ist. Verf. untersucht außer dem System der Dedekindschen Ideale zwei weitere Realisierungen der fünf Axiome und gibt eine Übersicht über die Abhängigkeiten der Eigenschaften dieser drei Idealsysteme an, wenn diese im gleichen Körper betrachtet werden. Unter vielem anderen werden die vollständigen und ganz abgeschlossenen Körper charakterisiert. — Es wird ferner untersucht, wie sich die Eigenschaften der Idealsysteme bei Erweiterung des Grundkörpers verhalten, und bewiesen, daß das eine der drei Idealsysteme bei gewissen Voraussetzungen über den Koeffizientenkörper für jeden algebraischen Funktionenkörper multiplikativ vollständig ist.

Tarussky (Wien).

Nielsen, Jakob: Über die Struktur eines Vektormoduls mit endlicher Basis, mit Anwendung auf diophantische Approximationen. *Mat. Tidsskr. B H.* **2**, 29–42 (1932) [Dänisch].

Es wird die Darstellung einer willkürlichen Abelschen Gruppe als Gruppe der Parallelverschiebungen in einem euklidischen Raum gegebener Dimension untersucht und daraus ein elementarer Beweis für die folgenden bekannten Kroneckerschen Approximationssätze hergeleitet: Damit das System der linearen Formen

$$t_1 \lambda_{1k} + t_2 \lambda_{2k} + \dots + t_q \lambda_{qk} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mit den beliebig gegebenen reellen Koeffizienten $\lambda_{ik} \left(\begin{smallmatrix} i = 1, 2, \dots, q \\ k = 1, 2, \dots, n \end{smallmatrix} \right)$ für ganzzahlige (reelle) Werte der Größen t_1, t_2, \dots, t_q ein gegebenes System reeller Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mod 1 approximieren kann, ist notwendig und hinreichend, daß $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$ ganz sei für alle ganzzahligen Werte von c_1, c_2, \dots, c_n , für welche $c_1 \lambda_{i1} + \dots + c_n \lambda_{in}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) ganz (Null) ist. Myrberg (Helsinki).

Jarník, V.: Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen. *Prace mat. fiz* **39**, 135–144 (1932).

Das System von s reellen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ ($s \geq 1$) heißt eigentlich, wenn keine Relation

$$k_0 + \sum_{i=1}^s k_i \theta_i = 0$$

mit ganzen $k_0, k_1, \dots, k_s \neq 0, 0, \dots, 0$ gilt. — Verf. beweist: Es sei $s \geq 1$, ganz und $\alpha \geq \frac{s+1}{s}$; dann gibt es mindestens ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$, welches zwar die Approximation $\frac{1}{x^\alpha}$, nicht aber die Approximation $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ zuläßt. Die Bedeutung liegt nicht so sehr im Satz (der in bekannten schärferen Sätzen enthalten ist: Perron, *Math. Ann.* **83**; Jarník, *Math. Z.* **33**; *Zbl.* **1**, 324), wie im Beweis: Schritt 1. $s = 1$. Mit bekannten elementaren Kettenbruchhilfsmitteln wird θ_1 leicht konstruiert. Schritt 2. Induktion nach s . Fall A. $s > 1$, $\alpha > \frac{s}{s-1}$. Nach der Induktionsannahme gibt es ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{s-1}$, das zwar die Appr. $\frac{1}{x^\alpha}$, nicht die Appr. $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ zuläßt. Ein einfaches Konstruktionsverfahren liefert dann un abzählbar viele θ_s , durch die diese Approximationsverhältnisse nicht gestört werden. Fall B. $s > 1$, $\frac{s+1}{s} \leq \alpha \leq \frac{s}{s-1}$. a) Es wird mit der Methode von Schritt 1 ein gewisses θ_1 fixiert. b) Es wird (unter Anwendung des Borelschen Überdeckungssatzes im R_{s-1}) ein System $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ gewählt. c) Es wird nachgewiesen, daß dieses das Gewünschte leistet; dabei wird das Schubfachprinzip noch angewendet. J. F. Koksma (Hilversum).

Walffisz, Arnold: Über einige trigonometrische Summen. II. Abh. *Math. Z.* **35**, 774–788 (1932).

Sei θ eine reelle Irrationalzahl mit $0 < \theta < 1$ und dem regelmäßigen Kettenbruch $\theta = \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots$, ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. Ist $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n und $D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) e^{-2\pi i n \theta}$, so beweist der Verf., daß für alle θ , für die α größer als eine Weltkonstante ist, die Relationen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Re(D(x))}{\sqrt{x}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} \log \alpha}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\Im(D(x))|}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{\alpha} \log \alpha}{5}$$

bestehen; wenn die Kettenbruchnenner a_n unbeschränkt sind, so sind diese Grenzwerte gleich unendlich. Der Beweis benutzt elementare Umformungen trigonometrischer Summen, eine van der Corputsche Abschätzung und eine Formel für das Verhalten der Potenzreihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) s^n$ in der Umgebung der Einheitswurzeln. —

Weiter wird in Verschärfung eines früheren Ergebnisses des Verf. [*Math. Z.* **33**, 564 bis 601 (1931), vgl. dies. *Zbl.* **1**, 390] u. a. gezeigt, daß für „fast alle“ θ die Ungleichung $D(x) = O(\sqrt{x} \log^{1+\varepsilon} x)$ besteht. K. Mahler (Krefeld).

Cavallaro, V. G.: Una raccolta di nuove formule approssimate rappresentanti il numero e , la costante d'Eulero, il numero π e derivati, lati di poligoni superiori, etc. *Boll. Un. Mat. Ital.* **11**, 164–168 (1932).

„L'A. esprime semplicemente, per seni d'angoli multipli di 3 gradi, quantità non costruibili elementarmente e raccoglie 152 (im verkürzten Abdruck nur etwa 50)

formule, generalmente trinomi, suscettibili di facile determinazione grafica del numero e , della costante d'Eulero, del numero π e derivati, e di lati di poligoni superiori, etc., con errore inapprezzabile." Bemerkenswert ist ferner eine Konstruktion von $\sin 3^\circ$, unter alleiniger Benutzung des Zirkels.

K. Mahler (Krefeld).

Schröder, J.: Zur Darstellung der Möbiusschen Funktion durch größte Ganze. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 89–93 (1932).

Eine von Brun für die Möbiussche μ -Funktion mittels der Funktion $[x]$ gegebene Darstellung [Norske Vid. Selsk., Forh. 4, 66 (1931)] wird durch Elimination der Brunschen Abkürzungen explizite aufgeschrieben; mit Hilfe der gewonnenen

Formel für die μ -Funktion wird dann die Identität $\sum_{\lambda=1}^x \mu(\lambda) [x/\lambda] = 1$ umgeformt. Die erhaltenen Formeln werden durch einige Zahlenbeispiele erläutert.

Daß für Ausdrücke wie $[A-1] - [B-1]$ nicht einfacher $[A] - [B]$ geschrieben wird, hängt vielleicht damit zusammen, daß Verf., wie aus seinen Formeln hervorgeht, unter $[x]$ für $-1 < x < 0$ nicht -1 , sondern 0 versteht (ebenso wie in einer früheren Arbeit, vgl. dies. Zbl. 1, 201).

Kalmár (Szeged).

Evelyn, C. J. A., and E. H. Linfoot: On a problem in the additive theory of numbers. V. Quart. J. Math., Oxford Ser. 3, 152–160 (1932).

Es sei $N \geq 2$ fest, $s \geq 2$, M durch kein p^N (N -te Primzahlpotenz) teilbar, $\nu_s(n)$ die Darstellungsanzahl von n als Summe von s M -Zahlen,

$$S_s(n) = \prod_{p^N \nmid n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^N - 1)^s} \right) \prod_{p^N | n} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p^N - 1)^{s-1}} \right).$$

Mit Hilfe einer Gelbkeschen Waringmethode (s. dies. Zbl. 3, 150) weisen die Verff.

$$\nu_s(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)! \zeta^s(N)} S_s(n) + O\left(n^{s-2+\frac{1}{N}+\frac{N-1}{Ns}+\epsilon}\right)$$

für $s > \sqrt{N} + 1$ nach und verkleinern damit zum Teil ihre früheren Restglieder (s. dies. Zbl. 1, 202; 2, 15; 3, 340).

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Mandelbrojt, S.: Sur les séries de Dirichlet dont les exposants sont linéairement indépendants. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1884–1887 (1932).

Let $D(\lambda)$ be the domain

$$\sigma \geq \lambda \sin^2 \frac{1}{4} [t - (t/2\pi) 2\pi], \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2},$$

where (x) denotes the integer nearest to x . Let

$$F(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$$

have a half-plane of absolute convergence. If $F(s)$ is holomorphic in $D(\lambda)$ and if no linear combination $A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + \dots + A_n \lambda_n$ with integral coefficients is itself an integer except when all the A 's are zero, then the values of $z = F(s)$ when $s \in D(\lambda)$ are everywhere dense in the circle

$$|z| < R = \text{least upper bound of } |a_n|. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

The proof of this interesting theorem follows from the observation that if

$$G(s) = \sum_1^\infty b_n e^{-\mu_n s}$$

is bounded and holomorphic in $D(\lambda)$, if the series has a half-plane of absolute convergence, and if $\mu_m - \mu_n$ is never an integer, then the b 's are bounded. The proofs are almost elementary and are largely based upon the use of the transformation $s = z - \log(1 + e^{-z}) + \log 2$ which carries a Dirichlet series of type λ_n into one of type $\lambda_n + m$.

Hille (Princeton, N. J.).

Analysis.

Scherrer, F. R.: Die Kreis- und die Hyperbelfunktionen. Eine Vergleichung auf geometrischer Grundlage. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **76**, 99—124 (1932).

Clarkson, J. A.: A sufficient condition for the existence of a double limit. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 391—392 (1932).

Selberg, O. M. L.: Über die Bestimmung der Maxima und Minima algebraischer Funktionen ohne Differentiation. Norsk mat. Tidsskr. **14**, 1—31 (1932) [Norwegisch].

Ausgehend von der Bemerkung, daß man den Extremwert einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ direkt erkennt, wenn man sie auf die Form

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

bringt, entwickelt der Verf. ähnliche Methoden zur Bestimmung der Extremwerte allgemeinerer (explizit oder auch implizit gegebener) algebraischer Funktionen ohne Verwendung von Differentiationsprozessen. Lüneburg (Göttingen).

Varopoulos, Th.: Sur les fonctions biconvexes. Prakt. Akad. Athénōn **7**, 27—30 (1932).

Vereinfachung eines Montelschen Beweises (dies. Zbl. **3**, 392) für den Satz, daß eine zweifach konvexe Funktion, d. h. eine Funktion $f(x, y)$, die bei Festhaltung einer Variablen (beschränkte) konvexe Funktion der anderen ist, stetig von beiden Variablen zugleich abhängt. (Vgl. auch das nachstehende Referat.) W. Fenchel (Göttingen).

Kritikos, N.: Sur les fonctions multiplement convexes ou concaves. Prakt. Akad. Athénōn **7**, 44—46 (1932).

Verf. bemerkt zunächst, daß der im vorstehenden Ref. genannte Satz schon von ihm 1930 (Bull. Soc. Math. Grèce **11**, 21—28), und zwar für Funktionen von n Variablen bewiesen wurde. Dann wird ein äußerst einfacher Beweis für den folgenden etwas allgemeineren Satz angegeben: Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, die in bezug auf x_1, \dots, x_{n-1} zugleich stetig und bei festen x_1, \dots, x_{n-1} in bezug auf x_n beschränkt und konvex ist, ist in bezug auf alle Variablen zugleich stetig. Hieraus folgt durch Induktion unmittelbar, daß eine in bezug auf jede einzelne Variable beschränkte und konvexe Funktion in bezug auf alle Variablen stetig ist. W. Fenchel (Göttingen).

Nagell, Trygve: Über das arithmetische und das geometrische Mittel. Norsk mat. Tidsskr. **14**, 54—55 (1932).

Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von n positiven Zahlen ist äquivalent mit der folgenden

$$F \equiv x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n - nx_1x_2\dots x_n \geq 0. \quad (1)$$

Es werde $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ angenommen und $x_i - x_n = \Delta_i$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ gesetzt. Verf. beweist sehr einfach durch Induktion eine Verschärfung von (1), bei der die 0 der rechten Seite durch eine trivialerweise nicht negative Funktion von $x_n, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ ersetzt ist. Insbesondere ergibt sich $F \geq \Delta_1^n + \Delta_2^n + \dots + \Delta_{n-1}^n$. W. Fenchel (Göttingen).

Poritsky, Hillel: On certain polynomial and other approximations to analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 274—331 (1932).

The author approximates to a given analytic function $f(z)$ by means of polynomials $P_{m,n}(z)$ of degree at most $mn-1$ defined as follows. Considering the m points a_1, a_2, \dots, a_m as fixed, he requires the derivatives of $P_{m,n}$ of orders divisible by m to have the same values at the fixed points as the same order derivatives of $f(z)$; i. e., $P_{m,n}^{(im)}(a_j) = f^{(im)}(a_j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, m$. — The conditions for the convergence of the $P_{m,n}(z)$ to $f(z)$ are given in terms of the values of λ (characteristic numbers) for which the system

$$\frac{d^m u}{dz^m} - \lambda^m u = 0, \quad u(a_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

has a solution not identically zero. If ϱ_m is the absolute value of the characteristic number (s) of smallest absolute value, the $P_{m,n}(z)$ will converge to $f(z)$ uniformly in any finite region provided that $f(z)$ is an integral function of exponential type less than ϱ_m . This condition is sufficient but not necessary as is shown for $m = \alpha$. The proof of this theorem involves certain „Green's functions“ — i. e., functions $G_{m,i}(z, s, \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, m$, such that the expression

$$u(z) = \sum_{i=1}^m \int_z^{a_i} G_{m,i}(z, s, \lambda) v(s) ds,$$

where $v(z)$ is a given analytic function, is equivalent to the system

$$\frac{d^m u}{dz^m} - \lambda^m u = (-1)^m v, \quad u(a_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

The remainder $f(z) - P_{m,n}(z)$ may be expressed in terms of the coefficients of the expansion of $G_{m,i}$ in powers of λ^m and then be proved to converge to zero by use of the asymptotic properties of these coefficients. — Three related problems of approximation are also discussed. Marden (Milwaukee).

Wall, H. S.: General theorems on the convergence of sequences of Padé approximants. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 409—416 (1932).

By the Padé approximant $[n, d]$ to a function $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (-z)^k$ is meant a rational function $N(z)/D(z)$, where $N(z)$ and $D(z)$ are polynomials of degrees at most n and d respectively, such that

$$P(z) D(z) - N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{n+d+1+k}.$$

Among the theorems proved in this article are the following. (1) If $P(z)$ is a positive definite power series (i. e., if all the forms $\sum_{i,j=0}^n c_{i+j} X_i X_j$, $n = 0, 1, 2, \dots$ are positive definite) converging for $|z| < R$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n, n+k] = \lim_{n \rightarrow \infty} [n+k, n] = P(z)$$

uniformly over an arbitrary closed region exterior to the real axis. (2) If $P(z)$ is a Stieltjes power series (i. e., if all the forms $\sum_{i,j=0}^n c_{i+j} X_i X_j$ and $\sum_{i,j=0}^n c_{i+j+1} X_i X_j$ are positive definite) converging for $|z| < R$, then $\lim_{m+n \rightarrow \infty} [m, n] = P(z)$ uniformly for $|z| \leq R - \delta$,

$\delta > 0$. — Two additional theorems are established for the case that $P(z)$ is Borel-summable to a function $F(z)$. Marden (Milwaukee).

Hildebrandt, Emanuel Henry: Systems of polynomials connected with the Charlier expansions and the Pearson differential and difference equations. Ann. math. Statist. **2**, 379—439 (1931).

L'auteur s'occupe des extensions et certaines applications de la formule connue de M. Charlier $F(x) = A_0 f(x) + A_1 f'(x) + \dots + A_n f^{(n)}(x) + \dots$ [Ark. Mat. Astron. Fys. **2**, (1905)]. Après avoir résumé avec quelques simplifications les résultats de

M. Charlier que celui-ci avait appliqués au cas, où $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}$, l'auteur envisage

le problème correspondant [déjà étudié antérieurement par M. Romanowsky, Biometrika, **16**, (1924) et C. R. Acad. Sci., Paris **188**, (1929)], où $f(x)$ est une des courbes de Pearson définie par l'équation

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{N}{D}.$$

Son étude (formelle) repose uniquement sur la considération de cette équation et redonne sous forme unifiée les résultats connus, ainsi que quelques développements nouveaux.

En particulier, en posant $P_n(x) = \frac{D^n d^n y}{y dx^n}$; $P_n(n, x) = \frac{1}{y} \frac{d^n D^n y}{dx^n}$, on constate que ce sont des polynômes de degré n analogues à ceux de Hermite, et l'on a

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} = (n+1)(a_1 - nb_2)P_n(x),$$

$$DP_n''(x) + [N - (n-1)D']P_n'(x) - n\left[N' - \frac{n-1}{2}D''\right]P_n(x) = 0,$$

$$DP_n''(n, x) + (N + D')P_n'(n, x) - n\left[N' + \frac{n+1}{2}D''\right]P_n(n, x) = 0.$$

Ensuite l'auteur passe à une étude analogue des séries de Charlier du type B : $F(x) = B_0 g(x) + B_1 \Delta g(x) + \dots + B_n \Delta^n g(x) + \dots$ suivant les différences successives d'une fonction donnée $g(x)$; il obtient le système de polynômes correspondant à u_x définie par l'équation

$$\Delta u_x = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} u_x = \frac{N_x}{D_x} u_x.$$

Les polynômes orthogonaux définis par les relations $\sum Q_n(x) \Delta_m u_x = 0$ ($n \geq m$) sont donnés par la formule $Q_n(x) = \frac{D_x^{(n)} \Delta^n u_x}{u_x}$, où $D_x^{(n)} = D_x D_{x+1} \dots D_{x+n-1}$. Parmi les nombreuses fomules de recurrence signalons

$$\Delta Q_n(x) = n \left[\Delta N_x - \frac{n-1}{2} \Delta_2 D_x \right] Q_{n-1}(x+1). \quad S. Bernstein.$$

Tallqvist, Hj.: *Tafeln der 24 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos \theta)$* . Soc. Sci. Fennicae Comment. phys.-math. 6, Nr 3, 1—11 (1932).

Sansone, G.: *Sulla chiusura dei polinomi di Legendre*. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 129—130 (1932).

L'A. con la diretta applicazione di un teorema di Vitali dimostra la chiusura dei polinomi di Legendre. *Autoreferat.*

Srivastava, P. L., et S. P. Jain: *Sur les singularités de l'intégrale de Laplace-Abel*. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2111—2113 (1932).

Voranzeige einer Verallgemeinerung von Sätzen über die Singularitäten der Integrale $f(s) = \int_0^\infty \varphi(z) e^{-sz} dz$ [G. Pólya, Math. Z. 29, 578—591 (1929)]; die Voraussetzung, $\varphi(z)$ sei ganz, wird hier durch eine Forderung der Regularität in einem Winkelraume ersetzt. *R. Schmidt (Kiel).*

Karamata, J.: *Remarks on a theorem of D. V. Widder*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 406—408 (1932).

Es werden Verallgemeinerungen eines Widderschen Satzes (dies. Zbl. 3, 302) ausgeführt, insbesondere diejenige, welche sich bei Widder (dies. Zbl. 4, 57) befindet. *Karamata.*

Lowry, H. V.: *Operational calculus. II. The values of certain integrals and the relationships between various polynomials and series obtained by operational methods*. Philos. Mag., VII. s. 13, 1144—1163 (1932).

Part. 1 was reviewed in this Zbl. 4, 248. Integrals of various types are evaluated by the methods of the operational calculus; for instance it is shown that

$$\int_0^x P_m(\cos u) \sin^{m-1}(x-u) du = \sin^m(x)/m.$$

Series involving Bessel functions such as

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{-\frac{1}{2}} J_n(2\sqrt{rx}), \quad \sum_{m=1}^{\infty} J_n(mx), \quad \sum_{m=1}^{\infty} J_n(mx) \cos my$$

are evaluated as are also certain series involving the functions

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{1}{2}x)^{n+2k+1}}{\Pi(n+k+\frac{1}{2}) \Pi(k+\frac{1}{2})}$$

which are known as Struve's functions.

Murnaghan (Baltimore).

Bureau, Florent: Sur une équation fonctionnelle. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1, 51—52 (1932).

In der Gleichung

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \lambda) \varphi(t) dt$$

sei K als Funktion von λ analytisch für $|\lambda| < \lambda_0$. Ähnlich wie im Fredholmschen Falle, wo K linear in λ ist, besitzt die Gleichung eine eindeutige Auflösung nach $\varphi(x)$ (wenn K beschränkt und fast überall stetig ist), die sich als Quotient zweier regulärer Funktionen in λ schreibt

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{\mathfrak{D}(x, t, \lambda)}{\mathfrak{D}(\lambda)} f(t) dt;$$

Ausnahmewerte von λ sind wieder die Nullstellen von $\mathfrak{D}(\lambda)$.

H. Lewy.

Nalli, Pia: Sui funzionali analitici. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 30—31 (1932).

Fantappiè, Luigi: Risposta alla nota „Sui funzionali analitici“. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 138—141 (1932).

Baidaff, B. I.: Systeme von Folgen, die eine lineare homogene Recursionsformel haben. Bol. mat. 5, 17—18 (1932) [Spanisch].

Ríos, Sixto: Eine Verallgemeinerung des Konvergenz-Algorithmus von Euler. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 7, 37—41 (1932) [Spanisch].

Winn, C. E.: Sur la relation entre une suite donnée et une autre suite dérivée avec le même intervalle d'oscillation. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2114—2115 (1932).

Durch die unendliche Matrix $\{a_{n\nu}\}$ mit $a_{n\nu} \geq 0$, $a_{n\nu} = 0$ für $n < \nu$, sei eine zeilenfinite lineare Summationsmethode definiert, d. h. jeder Zahlenfolge $\{s_n\}$ werde die transformierte Folge $\{t_n\}$ zugeordnet, wo $t_n = \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_\nu$ ist. Dafür, daß für jede konvergente Folge $\{s_n\}$ auch die transformierte Folge gegen denselben Grenzwert konvergiere, sind bekanntlich die beiden Bedingungen notwendig und hinreichend:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n\nu} = 0$ für jedes ν , 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} = 1$. Verf. stellt die Frage, für welche Summationsmethoden der betrachteten Art immer $\overline{\lim} s_n = \overline{\lim} t_n$ sowie $\underline{\lim} s_n = \underline{\lim} t_n$ gilt und beweist, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür lauten:

1'. Es gibt eine Indicesfolge $n(\nu) \geq \nu$, so daß $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{n(\nu)\nu} = 1$ ist, 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} = 1$.

Birnbaum (Wien).

Takeya, Sôichi: An extension of power series. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 125—138 (1932).

Verf. behandelt die Polynomentwicklung

$$f(z) = f(c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(c_n) \int_{c_0}^z dz_1 \int_{c_1}^{z_1} dz_2 \dots \int_{c_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_n,$$

wo $\{c_n\}$ eine gegebene beschränkte Folge ist, und knüpft an die Untersuchungen von S. Takenaka (dies. Zbl. 2, 196) an, deren Resultate er verallgemeinert.

Hille (Princeton, N. J.).

Sidon, S.: Berichtigung zu meiner Arbeit: „Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten“, Math. Zeitschr., Bd. 34, Heft 4, S. 477—480. Math. Z. 35, 624 (1932).

In his previous note mentioned above the author stated the equivalence of certain two theorems; he recognizes now that he is not in possession of a proof for this statement. (Cf. this Zbl. 3, 254.)

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Prasad, B. N.: Contribution à l'étude de la série conjuguée d'une série de Fourier. J. Math. pure appl., IX. s. 11, 153—205 (1932).

On sait qu'il existe un lien assez étroit entre la convergence ou la sommabilité de la série (*) $\sum (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$, conjuguée à une série de Fourier:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sim f(x),$$

et l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} t dt$. Au lieu de considérer cette dernière intégrale, M. Prasad considère une autre, (*) $\int_0^\pi \Psi(t) \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} t dt$, où $\Psi(t) = \Psi_x(t) = \int_0^t [f(x+u) - f(x-u)] du$, que l'on obtient, formellement, de la précédente, en l'intégrant par parties. L'existence de la première intégrale entraîne celle de la seconde, mais la proposition réciproque n'est vraie que si $\Psi(t) = o(t)$ (ce qui, d'ailleurs, a lieu presque partout). En étudiant les séries (*) sous la condition d'existence de l'intégrale (*), l'auteur généralise ainsi certains résultats (de Fatou, Plessner, Hardy-Littlewood, Paley) obtenus jusqu'à présent. Nous nous bornons à citer le théorème suivant: soit $v(r, x)$ la fonction harmonique que l'on obtient en multipliant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série (*) par r^n , alors

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left[v(r, x) - \frac{1}{4\pi} \int_{1-r}^\pi \Psi(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} t dt \right] = 0$$

pourvu que $\int_0^t \Psi(u) \frac{du}{u} = o(t)$. Le travail contient une bibliographie complète de la littérature relative aux séries conjuguées. A. Zygmund (Wilno).

Orlicz, W.: Quelques théorèmes sur les séries orthogonales. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2118—2120 (1932).

Es wird bewiesen: $M[u]$ sei eine für $u > 0$ definierte stetige, nichtabnehmende Funktion mit $M[0] = 0$, $M[u] > 0$ für $u > 0$, $M[u] \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$. Wenn für eine Folge von in $\langle 0, 1 \rangle$ meßbaren Funktionen $\{f_n(x)\}$ eine Konstante K existiert, so daß

$$\int_0^1 M[|f_{n_1}(x) + f_{n_2}(x) + \dots + f_{n_r}(x)|] dx \leq K \quad \text{für beliebige } n_1, n_2, \dots, n_r \quad (*)$$

ist, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f_n^2(x)$ fast überall in $\langle 0, 1 \rangle$. Setzt man von $M[u]$ noch voraus, daß für $u > u_0 > 0$ die Ungleichung $M[2u] \leq P \cdot M[u]$ mit einem konstanten P besteht, so folgt aus (*) die Existenz einer meßbaren Funktion $f(x)$, für welche

$$\int_0^1 M[|f_1(x) + \dots + f_n(x) - f(x)|] dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 M[|f(x)|] dx < \infty \quad \text{gilt.}$$

Birnbbaum (Wien).

Favard, J.: Sur la répartition des points où une fonction presque périodique prend une valeur donnée. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1714—1716 (1932).

$f(s)$ sei eine analytische Funktion der Variablen $s = \sigma + it$ und fastperiodisch im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$; $E(\sigma_0)$ sei die abgeschlossene Hülle der Werte $f(\sigma_0 + it)$ auf einer im Inneren dieses Streifens gelegenen Geraden $\sigma = \sigma_0$ und a ein Wert aus dieser Menge. Es werden einige Sätze über die Verteilung der Wurzeln der Gleichung $f(s) = a$ in einem Teilstreifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ des obigen Streifens angegeben. U. a.: Es gibt eine Länge $l(f, a, \alpha_1, \beta_1)$, so daß jedes Rechteck $R_{t_0}^{t_0+l}$: $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, $t_0 < t < t_0 + l$ mindestens eine Wurzel enthält. Es gibt eine Konstante $k(f, a, \alpha_1, \beta_1)$, so daß jedes Rechteck $R_{t_0}^{t_0+l}$ höchstens k Wurzeln enthält. Die Sätze gestatten eine ver-

einfache Ableitung einiger Resultate über die Werteverteilung der Riemannschen ζ -Funktion. Lüneburg (Göttingen).

Differentialgleichungen:

Burgatti, P.: Di una classificazione dell'equazioni lineari del second'ordine alle derivate ordinarie fondata sulle relazioni ricorrenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 490—498 (1932).

Für eine Reihe von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $y(x)$

$$E_n(y) = y'' + Q(x)y' + R_n(x)y = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

z. B. die der Besselschen Funktionen und der Legendreschen Polynome, kennt man die Eigenschaft, daß man aus einer Lösung y_n von $E_n(y) = 0$ durch einfache lineare Kombinationen von y_n und y'_n eine Lösung y_{n+1} von $E_{n+1}(y) = 0$ aufbauen kann. Verf. schlägt eine Klassifikation obiger Differentialgleichungen $E_n(y) = 0$ nach der Form dieser rekurrenten Beziehung vor; z. B. die erste Klasse, wenn $y_{n+1} = y'_n + c_n y_n$, die zweite Klasse, wenn $y_{n+1} = y'_n + \varphi(x, n) y_n$, usw. und transformiert in gewissen Fällen die Differentialgleichung auf eine einfache Gestalt. Lewy (Göttingen).

Fukuhara, Masuo: Sur les singularités des fonctions définies par des équations différentielles ordinaires. II. Équations linéaires. Jap. J. Math. 8, 143—157 (1931).

Es werden die Ergebnisse der ersten Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 2, 339) präzisiert und verallgemeinert. Verf. geht aus von einem System

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}(t) z_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (c)$$

wo die $\gamma_{ij}(t)$ stetig in $0 < t \leq h$ sind. Unter t_1, \dots, t_n verstehe man irgend n Zahlen aus $e < t \leq h$ ($0 \leq e \leq h$) und nehme die Existenz von n (als integrierbar voraussetzenden) Funktionen $\omega_i(t|t_1, \dots, t_n)$ an, welche der folgenden Bedingung genügen:

$$\left| \int_{t_i}^t \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}(\tau) |\omega_j(\tau|t_1, \dots, t_n)| d\tau \right| \leq \lambda(t) \omega_i(t|t_1, \dots, t_n), \quad i = 1, \dots, n$$

$e \leq t \leq h$; unter $\lambda(t)$ eine nicht abnehmende Funktion verstanden, für welche $\lambda(h) < 1$ ist. Sind dann z_i^0 Zahlen, für welche

$$|z_i^0| \leq A \omega_i(t|t_1, \dots, t_n), \quad e < t \leq h, \quad A \text{ konstant,}$$

so gilt für eine Lösung $z_i(t)$ von (c) mit der „Anfangsbedingung“ $z_i(t_i) = z_i^0$ die Abschätzung

$$|z_i - z_i^0| \leq \frac{A\lambda(t)}{1 - \lambda(h)} \omega_i(t|t_1, \dots, t_n). \quad (I')$$

Durch die Anfangsbedingung und durch die Forderung der Existenz von

$$\lim_{t \rightarrow 0} |y_i(t) - z_i^0| : \omega_i(t|t_1, \dots, t_n)$$

ist die Lösung $y_i(t)$ eindeutig festgelegt. Aus (I') werden nun, unter zusätzlichen Annahmen über die ω_i , weitere Abschätzungen für die Lösungen z_i hergeleitet. Diese werden wiederum auf spezielle Systeme (c), so auf solche von der in der ersten Mitteilung betrachteten Art, angewandt. Da die Ergebnisse aber meist ziemlich kompliziert sind, muß wegen weiterer Einzelheiten auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Haupt.*

Denjoy, Arnaud: Sur les caractéristiques du tore. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2014 bis 2016 (1932).

Die vorliegende Arbeit enthält neue interessante Vervollständigungen der früheren Note des Verf. (C. R. Acad. Sci., Paris 194, 830—833; dies. Zbl. 4, 62) über den Verlauf der Integralkurven der Differentialgleichung $\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta)$ auf der Torusfläche (wo φ und θ Winkelkoordinaten auf dem Torus bedeuten). — Es werden die sukzessiven Schnittpunkte $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$ einer und derselben Integralkurve mit dem Torusmeridian $\varphi = \varphi_0$ angeführt. Die Koordinaten θ dieser Schnittpunkte seien bzw. mit

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ bezeichnet. Der notwendigerweise existierende Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{n}$ sei mit $2\pi\alpha$ bezeichnet, wobei α irrational vorausgesetzt wird. Bilden wir die Funktion $\theta_1 = \theta_1(\theta_0)$, welche die Abhängigkeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden derartigen Schnittpunkten angibt. Betrachten wir weiter den Ausdruck

$$h(\theta_0) = \log \frac{d\theta_1}{d\theta_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta.$$

Aus der Endlichkeit und Summierbarkeit der Funktion $\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$ auf der ganzen Torusfläche folgt, daß die totale Variation V von $h(\theta_0)$ beschränkt ist. In diesem Falle sind die Integralkurven stabil (im Poissonschen Sinn). — Es wird weiter die Poincarésche Funktion untersucht, die folgendermaßen definiert ist: Es wird jedem Punkte M_n auf Γ ein Punkt auf dem Einheitskreis mit der Winkelkoordinate $\omega + 2\pi n\alpha$ zugeordnet. Da die Punkte M_n auf Γ überall dicht liegen und die Reihenfolge von M_n auf C und M_n auf Γ dieselbe ist, so kann man diese Zuordnung zu einer eindeutigen stetigen Zuordnung von Γ auf C vervollständigen. Wir bekommen eine stetige Transformation $\theta = \psi(\omega)$, die die Eigenschaft $\theta_1(\theta) = \psi(\omega + 2\pi\alpha)$ besitzt. Der Verf. untersucht die Punktmenge auf C , auf welchen die Ableitung von $\psi(\omega)$ nach rechts (bzw. links) endlich, unendlich groß, gleich Null ist und die Punktmenge, wo diese Ableitungen überhaupt nicht existieren. L. Schnirelmann (Moskau).

Hohenemser, K., und W. Prager: Über das Gegenstück zum Rayleighschen Verfahren der Schwingungslehre. Ing.-Arch. 3, 306—310 (1932).

Bei der Berechnung des Grundtons λ_1 eines schwingenden Systems benutzt man bekanntlich dessen Definition als Minimum des Quotienten zwischen Formänderungsarbeit und Arbeit der äußeren Kräfte; man nimmt zur Approximation eine Näherung y_0 für die Form der Schwingung und erhält so eine obere Schranke für λ_1 . Zur Verbesserung denkt man y_0 als nullte Näherung einer Folge y_0, y_1, y_2, \dots , die gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert (z. B. sukzessive Approximationen) und bestimmt den obigen Quotienten für y_1, y_2 , wodurch bessere Zahlenwerte für λ entstehen. Die Verf. schlagen eine „Zwischenlösung“ vor, deren Güte an einem einfachen Beispiel erprobt wird; sie berechnen nicht gleich die volle Schwingungsform y_1 , sondern nur deren Spannungen und drücken den obigen Integralquotienten durch diese Spannungen aus; dadurch sparen sie z. B. im Falle der Transversalschwingungen eines Stabes zwei Integrationen, ohne wesentliche Einbuße an Genauigkeit. Lewy.

Pfeiffer, G.: Die Konstruktion des allgemeinen Operators der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die in bezug auf einen von den Differentialquotienten aufgelöst ist. J. Cycle math. 1, 59—66 (1931) [Ukrainisch].

Pfeiffer, Georg: Die Konstruktion des allgemeinen Operators des Involutions-systems von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen. J. Cycle math. 1, 43—57 (1931) [Ukrainisch].

Um den allgemeinen Operator eines Involutionsystems von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (oder einer lin. part. Differentialgl.) zu konstruieren, erhält der Verf. ein Jacobisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren unbekannten Funktionen. Dieses System wird nach einigen Transformationen gelöst. (Vgl. die früheren Abhandlungen des Verf. über die Konstruktion solcher Operatoren — ref. dies. Zbl. 1, 209; 2, 265; 3, 114, 397; 4, 9.) Janczewski (Leningrad).

Pfeiffer, G.: Les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. Acad. Sci. Ukraine, Bull. Nr 1, 39—44 u. franz. Zusammenfassung 44 (1931) [Ukrainisch].

Diese Abhandlung ist dem Inhalte nach parallel mit der Abhandlung des Verf. „Généralisation de la méthode de Jacobi“ — referiert dies. Zbl. 3, 397. Janczewski.

Schauder, J.: Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Math. Ann.* **106**, 661—721 (1932).

L'aut. se propose d'indiquer des cas où le fait de savoir qu'une équation générale du type elliptique

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = \Psi \quad (1)$$

ne peut avoir plus d'une solution prenant des valeurs données sur la frontière d'un domaine donnée, suffit pour être certain qu'il y a effectivement une solution. Les démonstrations de l'aut. n'emploient pas la méthode des approximations successives; déjà dans un précédent travail [*Studia Math.* **1**, 123—139 (1929)] l'aut. avait étudié l'espace fonctionnel; reprenant ici ce point de vue, l'aut. démontre une suite de propositions topologiques qu'il applique aux ensembles $E_{\alpha, m}$ de fonctions dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m existent et remplissent une condition de Hölder avec l'exposant α : chacune de ces fonctions est considérée comme un élément de l'espace fonctionnel (l'aut. considère seulement le cas où les fonctions de $E_{\alpha, m}$ dépendent de deux variables au plus). Il est clair que si les valeurs absolues des fonctions f_n d'un ensemble compris dans $E_{\alpha, m}$, et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m , et les coefficients des conditions de Hölder restent bornés, on peut extraire de la suite f_n une suite qui converge uniformément vers une fonction f appartenant aussi à $E_{\alpha, m}$ et pour laquelle les mêmes limitations sont valables; c'est ce que l'aut. nomme la convergence faible, la convergence forte ayant lieu quand le coefficient des conditions de Hölder d'exposant α , pour les dérivées d'ordre m de $f_n - f$, tend aussi vers zéro; ces notions de convergence rapprochent l'espace fonctionnel $E_{\alpha, m}$ de l'espace ordinaire et permettent l'étude topologique faite par l'aut. Le but de son travail conduit ensuite l'aut. à différents lemmes relatifs aux équations linéaires du type elliptique, et il arrive enfin au théorème relatif à l'équation (1); il suppose que la fonction F appartient à l'espace $E_{\alpha, 3}$ relativement à l'ensemble des huit variables; de plus, en désignant par p_i, q_i, r_i, s_i, t_i les dérivées premières et secondes de z_i , il suppose que l'identité $F(x, y, z_1, p_1, \dots, t_1) = F(x, y, z_2, p_2, \dots, t_2)$ entraîne $z_1 = z_2$ dans tout un domaine K si seulement z_1 et z_2 appartiennent à $E_{\alpha, 3}$ et coïncident à la frontière; si alors on pose $\Psi_0 = F(x, y, z_0, \dots, t_0)$, où z_0 est une fonction donnée de $E_{\alpha, 3}$, et si $\varphi_0(\theta)$ désigne les valeurs frontières de z_0 , l'équation (1) a une et une seule solution prenant les valeurs $\varphi(\theta)$ sur la frontière si φ et Ψ appartiennent à $E_{\alpha, 1}$ et si en outre les valeurs absolues de $\Psi - \Psi_0$, de $\varphi - \varphi_0$ et de leurs dérivées, et les coefficients de Hölder de ces dérivées pour l'exposant α , sont inférieurs à un nombre ε assez petit. Le cas où r, s, t figurent linéairement dans F est étudié à part; le résultat relatif à l'équation (1) est aussi étendu à certains systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Une dernière partie du mémoire commence par un théorème topologique relatif à une opération fonctionnelle portant sur deux éléments x_1, x_2 dont un seul possède les propriétés relatives à la convergence faible (M. Banach a communiqué à l'aut. une autre généralisation d'une de ses propositions topologiques). L'aut. étend ensuite ses considérations à diverses équations très générales et à des systèmes d'équations, par exemple à l'équation $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = f(x, y, z)$, où f est une fonction continue des trois variables et une fonction croissante de z . L'aut. indique que des résultats de Giraud, relatifs aux équations du type elliptique à un nombre quelconque de variables, permettraient d'élargir les hypothèses dans lesquelles la proposition relative à l'équation (1) est valable, et permettraient d'autre part d'étendre au cas d'un nombre quelconque de variables cette proposition ainsi élargie.

Georges Giraud (Clermont-Ferrand).

Friedrichs, Kurt, und Hans Lewy: Über fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* Nr **26**, 135—143 (1932).

In die Volterrasche Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bei vorgeschriebenen Anfangswerten $u(0, x, y)$ und $u_t(0, x, y)$ gehen noch die Ableitungen der Anfangswerte für u ein. Um sicherzustellen, daß die Lösung zweimal stetig differenzierbar wird, setzt man voraus, daß die Anfangswerte drei- bzw. zweimal stetig differenzierbar sind. Will man aber nach dem Huygensschen Prinzip die Lösung für $t = t_2$ berechnen, indem man von der Lösung für einen Zwischenwert $t = t_1$ ausgeht, so ist man genötigt, von den Lösungswerten für $t = t_1$ dreimalige und von den Anfangswerten für $t = 0$ daher sogar viermalige Differenzierbarkeit vorauszusetzen, was der Natur der Sache widerspricht. Es werden daher solche Bedingungen für die Anfangswerte aufgestellt, denen die Werte der Lösung auf jeder raumartigen Ebene von selbst genügen: Die Anfangswerte für u bzw. u_t müssen

zwei- bzw. einmal stetig differenzierbar sein; sie müssen sich zugleich mit diesen Ableitungen durch solche vier- bzw. dreimal stetig differenzierbare Funktionen gleichmäßig approximieren lassen, für die die Gebietsintegrale über die Quadrate aller Ableitungen 3. und 4. bzw. 2. und 3. Ordnung gleichmäßig beschränkt sind. Ist die Approximation überhaupt möglich, so auch durch Polynome. Sind aber die Anfangswerte Polynome, so gibt es trivialerweise ein Polynom als Lösung, so daß die Behauptung auf eine Konvergenzbetrachtung hinausläuft.

Willy Feller (Kiel).

Germa, R.-H.-J.: Sur le calcul par approximations successives des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1, 36—39 (1932).

Es werden die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda \left[a_\mu(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b_\mu(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c_\mu(x, y) z \right] + f_\mu(x, y)$$

für $\mu \rightarrow \infty$ untersucht, und es wird die Grenzlösung mit Hilfe der Riemannschen Funktionen ausgedrückt.

Rellich (Göttingen).

Cioranescu, N.: Nouveaux problèmes sur les équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2115—2117 (1932).

Das Problem, eine Lösung $z(x, y)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

mit vorgegebenen Werten auf x, y innerhalb des Winkels xy zu bestimmen, wird hier folgendermaßen verallgemeinert: Man verlangt eine Lösung der obigen Gleichung, die den Bedingungen

$$\int_0^a z(x, s) d\alpha(s) = f(x), \quad \int_0^b z(s, y) d\beta(s) = g(y)$$

genügt. Eine andere Verallgemeinerung ergeben die Bedingungen

$$\begin{cases} z(t \cos \alpha, t \sin \alpha) + \int_\alpha^\beta z(t \cos \theta, t \sin \theta) p(\theta) d\theta = f(t), \\ z(t \cos \beta, t \sin \beta) + \int_\alpha^\beta z(t \cos \theta, t \sin \theta) q(\theta) d\theta = g(t), \end{cases} \quad \left(0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

wobei die Lösung z innerhalb des Winkels $\alpha \leq \theta \leq \beta$ definiert werden muß. Unter nicht wesentlich einschränkenden Voraussetzungen wird für beide Probleme die Existenz der Lösung bewiesen. Es wird dann bemerkt, daß die erhaltenen Resultate für die allgemeinere hyperbolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda \left[a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz \right] + f(x, y)$$

noch gültig bleiben, falls λ hinreichend klein ist. Das folgt, auf Grund der bewiesenen Existenzsätze, durch Anwendung der Methode der sukzessiven Annäherungen.

G. Cimmino (Napoli).

Cioranescu, N.: La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 638—642 (1932).

Es werden Bedingungen gesucht, die man an Stelle der üblichen Randbedingungen den Lösungen der Potentialgleichung auferlegen kann, so daß man immer noch auf Integralgleichungen geführt wird. Man kann gewisse Mittelwerte für die Lösung auf Kurven einer Schar vorschreiben, die im betrachteten Gebiet etwa den Radien eines Kreises entsprechen.

Willy Feller (Kiel).

De la Vallée Poussin, C.: Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 11—14 (1932).

Si l'on applique l'opération du balayage au domaine spatial D indiqué par le titre et contenant une masse unité en un point intérieur P , cette masse se répartit sur

la frontière S suivant une couche dont la densité ϱ au point Q de S est une fonction continue

$$\varrho(Q, P) = \frac{\cos \theta}{2\pi r^2} + \xi,$$

où $r = PQ$, θ = angle avec la normale extérieure en Q , $\xi = O(1/r)$. Si F est une fonction additive et à variation bornée d'ensemble superficiel porté par S , l'intégrale de Stieltjes

$$U(P) = \int_S \varrho(Q, P) dF \quad (1)$$

est une fonction harmonique dans D , prenant la valeur $F'(Q)$ en tout point Q de S où cette dérivée existe et est finie, donc presque partout. En particulier, si U est borné, F est absolument continu; on peut alors écrire

$$U(P) = \int_S \varrho U dS, \quad (2)$$

l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue. Si U est positif non borné, F existe encore et est positif, mais non plus absolument continu. Dans le cas général, la décomposition de F en une fonction absolument continue, en une fonction continue, nulle sauf sur un ensemble de mesure nulle, et en une fonction nulle sauf sur un ensemble dénombrable de points, permet de démontrer que la fonction harmonique positive la plus générale est la somme d'une intégrale (2) de Lebesgue, d'une intégrale (1) de Stieltjes étendue à l'ensemble singulier de mesure nulle, et d'une série $\sum \alpha_k \varrho(Q_k, P)$ étendue aux points de discontinuité.

Georges Giraud (Clermont-Ferrand).

Rocher, P.: Sur les lignes de plus grande pente de la fonction de Green. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 528—532 (1932).

In mehr als zwei Dimensionen hängt die Gradientenkurve der Greenschen Funktion der Potentialgleichung, die durch den Pol A der Funktion und einen anderen Punkt B geht, nicht symmetrisch von A und B ab. Zum Beweise genügt es, ebene Gradientenkurven der Greenschen Funktion für den Halbraum zu betrachten, wo eine einfache Symmetrieüberlegung von Bouligand für drei Dimensionen [Nouv. Ann. Math., VI. s. 2, 148 (1927)] zum Ziele führt. Es wird auch die Integration der Kurvengleichung behandelt.

Willy Feller (Kiel).

Gomes, Ruy Luis: Sur l'existence de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 533—536 (1932).

Gomes, Ruy Luis: Sur les limites de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 642—645 (1932).

Die bekannten Eigenschaften des Potentials einer stetigen Massenbelegung auf einer Fläche (Existenz der Normalableitung auch für Flächenpunkte und ihre Sprungrelation; vgl. etwa E. Goursat, Cours d'Analyse 3, 281 ff. Paris 1923) werden bewiesen unter der Annahme, daß die Fläche in einer Umgebung des betrachteten Punktes bloß beschränkte Ableitungen zweiter Ordnung besitzt (nicht notwendig stetige, wie man gewöhnlich voraussetzt).

Willy Feller (Kiel).

Vasilescu, Florin, et Rolin Wavre: Sur une manière d'engendrer des fonctions harmoniques multiformes dans l'espace ou le plan. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2282 bis 2284 (1932).

Man kann mehrdeutige harmonische Funktionen mit sehr verschiedenen Singularitäten erhalten, wenn man vom Potential V einer beschränkten Punktmenge ausgeht. Sei Σ die (geschlossene) Fläche $V = c$, und $\varrho(P)$ die Belegungsfunktion auf Σ , die das Potential V im Äußern erzeugt. Betrachtet man auf Σ ein beliebiges Gebiet S , so ergibt sich bei der analytischen Fortsetzung des von der Massenbelegung auf S erzeugten Potentials eine mehrdeutige Funktion: man gehe etwa von einem Punkte im Äußern von Σ aus, gelange durch S ins Innere und kehre zurück, ohne S zu schneiden.

Willy Feller (Kiel).

Donder, Th. de: La notion d'angle dans une métrique géométrique quelconque. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 303—310 (1932).

Donder, Th. de: La notion d'angle dans une métrique géométrique quelconque. II. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 401—404 (1932).

Im n -dimensionalen Riemannschen Raum wird mit Hilfe der entsprechenden Grundlösung ein $(n - 1)$ -dimensionales Integral angegeben, das man als Winkel auffassen kann, unter dem eine Hyperfläche von einem Punkte aus gesehen wird. Es sei hier bemerkt, daß dieses Integral das Analogon zum Potential einer homogenen Doppelschicht auf der Fläche darstellt für den Fall der allgemeinen linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es handelt sich also um die Übertragung der bekannten Gaußschen geometrischen Deutung dieses Potentials, die übrigens bereits bekannt ist [vgl. die Arbeit des Ref., Math. Ann. **102**, 645 (1930)]. — Die zweite Note behandelt die Invarianteneigenschaft des Integrals. *Willy Feller* (Kiel).

Schauder, J.: Bemerkung zu meiner Arbeit „Potentialtheoretische Untersuchungen I (Anhang)“. Math. Z. **35**, 536—538 (1932).

Berichtigung eines Fehlers. (Vgl. dies. Zbl. **1**, 336.)

Ahlfors (Paris).

Funktionentheorie:

Toudze, D.: Sur l'indépendance de l'intégrale curviligne du chemin d'intégration et la généralisation des lemmes fondamentaux du calcul des variations. Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. **5**, 123—129 (1932).

Die notwendige Bedingung für die Unabhängigkeit des Integrals $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ vom Wege wird unter schwachen Voraussetzungen hergeleitet. *Rellich* (Göttingen).

Cinquini, Silvio: Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del calcolo delle variazioni. I. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10**, 233—254 (1932).

Es werden notwendige Bedingungen für die Halbstetigkeit eines Integrals $\iint f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$ angegeben, wo $z = z(x, y)$ eine totalstetige Funktion bedeutet. Für Halbstetigkeit nach unten ist notwendig: $f_{z_x z_x} f_{z_y z_y} - f_{z_x z_y}^2 \geq 0$, $f_{z_x z_x} \geq 0$, $f_{z_y z_y} \geq 0$, für Halbstetigkeit nach oben: $f_{z_x z_x} f_{z_y z_y} - f_{z_x z_y}^2 \leq 0$, $f_{z_x z_x} \leq 0$, $f_{z_y z_y} \leq 0$. Will man nur f_{z_x} , f_{z_y} als stetig voraussetzen, so kann man die entsprechenden Bedingungen mit Hilfe der E -Funktion ausdrücken. *Rellich* (Göttingen).

Janet, Maurice: Détermination explicite de certains minima dans des problèmes sans conditions aux limites. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 2109—2111 (1932).

It is well known that for $y_0 = y_1 = 0$, the inequality $\int_0^1 y'^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 y^2 dx$ holds whenever then integrals exist, y_0 and y_1 denoting the values of y at $x = 0$ and $x = 1$ respectively (see, e. g. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations **1**, 335). The author proves the following generalization of this inequality: Without any restrictions on y_0 and y_1 , the point

$$X = \frac{y_0^2 + y_1^2}{2 \int_0^1 y^2 dx}, \quad Y = \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}$$

always lies above the curves determined by the parametric equations

$$X = \frac{t(1 + \cos t)}{t + \sin t}, \quad Y = t^2 \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}, \quad \text{for } 0 \leq t \leq \pi,$$

and

$$X = \frac{t(1 + \cosh t)}{t + \sinh t}, \quad Y = t^2 \frac{\sinh t - t}{\sinh t + t}, \quad \text{for } 0 \leq t.$$

The first branch of this curve falls monotonically from $(0, \pi^2)$ to $(1, 0)$ as t decreases from π to 0; the second branch rises monotonically from $(1, 0)$ as t increases.

[Arnold Dresden (Swarthmore).]

McShane, E. J.: On the semi-continuity of double integrals in the Calculus of Variations. *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 460—484 (1932).

The following definitions are used in this paper. A set of three equations $x^1 = x^1(u, v)$, $x^2 = x^2(u, v)$, $x^3 = x^3(u, v)$, where x^1, x^2, x^3 are defined and continuous in a Jordan region R (that is to say, in and on a Jordan curve), defines a continuous surface S . The distance $\|S_1, S_2\|$ of two continuous surfaces

$$\begin{aligned} S_1: x^i &= x^i_1(u_1, v_1), \quad i = 1, 2, 3, \quad (u_1, v_1) \text{ in } R_1, \\ S_2: x^i &= x^i_2(u_2, v_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (u_2, v_2) \text{ in } R_2, \end{aligned} \quad (E)$$

is defined as follows. Consider a topological correspondence T between R_1 and R_2 , preserving the indicatrix, and denote by $M(T)$ the maximum of the distance of the points $x^i_1(u_1, v_1)$ and $x^i_2(u_2, v_2)$, where (u_1, v_1) and (u_2, v_2) are corresponding points under T . The lower bound of $M(T)$, for all T 's specified above, is the distance $\|S_1, S_2\|$ of S_1 and S_2 (if the restriction that T preserves the indicatrix is dropped, this definition reduces to that given by Fréchet). The sets of equations (E) are considered as parametric representations of the same surface if $\|S_1, S_2\| = 0$. A sequence S_n converges toward a surface S if $\|S_n, S\| \rightarrow 0$. A surface is rectifiable if it admits of a representation where the coordinate functions satisfy a Lipschitz condition; such representations are called typical representations of the rectifiable surface. — The author considers then double integrals of the form $\iint f(x^i, X^i) du dv$, where X^1, X^2, X^3 denote the Jacobians $x^2_u x^3_v - x^3_u x^2_v$, $x^3_u x^1_v - x^1_u x^3_v$, $x^1_u x^2_v - x^2_u x^1_v$. Such an integral has a sense for all typical representations of a rectifiable surface S . If $f(x^i, X^i)$ is positively homogeneous of degree 1 in X^1, X^2, X^3 , the author proves that the integral does not depend upon the choice of the typical representation (as generally it is not possible to pass by a change of parameters from one typical representation to any other, this result is very general). The integrand $f(x^i, X^i)$ being supposed to satisfy the homogeneity condition, the integral $\iint f(x^i, X^i) du dv$ may be then denoted by $F(S)$, as it only depends upon the rectifiable surface S and not upon its representation. The main object of the author is then to find conditions for the lower semi-continuity of $F(S)$ as a functional of S . He introduces the expression

$$E(x^i, X^i, \bar{X}^i) = f(x^i, \bar{X}^i) - \sum_{\alpha=1}^3 \bar{X}^\alpha \frac{\partial f(x^i, X^i)}{\partial X^\alpha},$$

and obtains results which generalize very substantially theorems concerned with the integrals $\iint g(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y) dx dy$ [see Tonelli, *Acta math.* **53**, 325—346 (1929)] and $\iint (EG - F^2)^{1/2} du dv$ [the area-integral; for a systematic treatment, see Radó, *Math. Ann.* **100**, 445—479 (1928)]. One of the main results of the author is the following theorem. Consider the rectifiable surface

$$S: x^i = x^i(u, v), \quad (u, v) \text{ in } R,$$

and suppose that 1) $f(x^i, X^i) \geq 0$ for all points x^i in the neighborhood of S and for $(X^1 + X^2 + X^3)^{1/2} \neq 0$, and 2) $E(x^i(u, v), X^i(u, v), \bar{X}^i) \geq 0$ for almost all points (u, v) with $(X^1(u, v)^2 + X^2(u, v)^2 + X^3(u, v)^2)^{1/2} \neq 0$ and for all vectors \bar{X}^i different from $k X^i(u, v)$, $k \geq 0$. Then $\liminf F(S_n) \geq F(S)$ for every sequence $S_n \rightarrow S$ of rectifiable surfaces with uniformly bounded areas. If in either 1) or in 2) the sign of equality is excluded, the restriction as to the areas of the surfaces S_n can be dropped. — The restricted space makes it impossible to give a complete account of further theorems and of the details of the methods of the interesting paper.

Tibor Radó.

Geometrische Funktionentheorie:

Mandelbrojt, S.: Sur la meilleure approximation des primitives d'une fonction continue. Bull. Sci. math., II. s. 56, 142—146 (1932).

Dans cet article, Mand. apporte qq. compléments aux théorèmes de son mém. du Bull. Sci. mat. 55, 303 (voir Zbl. 1, 281 et 2, 400) en montrant par exemple que la condition $|y| > n$ de l'énoncé du th. I (Zbl. 1, 281) peut être remplacée par $y > n$ ou $y < -n$. — Mais son but principal est de donner une forme nouvelle aux énoncés en introduisant dans les hypothèses, à la place de la borne m_n du module de la primitive d'ordre n (convenablement choisie), l'écart du polynôme de meilleure approximation d'ordre m de cette primitive sur un segment (c, d) . Cet écart $\overset{d}{E}_m^{(n)} f(x)$ est la borne inférieure du maximum de $|f^{(-n)}(x) - P_m(x)|$ sur (c, d) , $P_m(x)$ étant un polynôme quelconque de degré m . Il est indépendant de la primitive choisie dès que $m \geq n - 1$. Pour donner une idée nette de ces nouveaux énoncés, dont la démonstration repose surtout sur ce qu'on peut y considérer la $(n + 1)$ ième primitive indépendamment de la n ième, je reproduis celui correspondant au th. I cité ci-dessus: Soit $F(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans le demi-plan $x \geq 0$ ($z = x + iy$), a un nombre fixe supérieur à 1, et

$$K_n = \text{borne sup. de } \overset{ay}{E}_{n-1}^{(n)} F(iu), \quad y > n, \quad n \text{ entier.}$$

Si $\lim \sqrt[n]{K_n} = 0$, la fonction $F(z)$ est identiquement nulle. G. Valiron.

Calugaréano, Georges: Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle. Bul. Soc. şti. Cluj 6, 379—383 (1932).

Verf. zeigt, daß eine notw. und hinr. Bedingung, damit $w = f(z)$ im Kreise $|z| < R$ regulär und schlicht sein soll, ist, daß

$$\psi_0(z) = \log f'(z); \quad \psi_\nu(z) = \log \frac{f(e^{i\nu} z) - f(z)}{(e^{i\nu} - 1)z} \quad \nu = 1, 2, \dots$$

dort regulär sind. Der Schlichtheitsradius von $f(z)$ ist also gleich der unteren Grenze der Regularitätsradien von $\psi_\nu(z)$, d. h. in den Koeffizienten der Potenzreihe von $f(z)$ (in komplizierter Weise) ausdrückbar. Hille (Princeton, N. J.).

De la Vallée Poussin, C.: Utilisation de la méthode du balayage dans la théorie de la représentation conforme. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 385—400 (1932).

L'aut. rappelle quelques résultats récemment publiés par lui dans Ann. Inst. H. Poincaré (voir ce Zbl. 4, 114) et, complétant dans le cas du plan les propositions de ce mémoire, il en déduit une démonstration du théorème de Carathéodory, d'après lequel toute aire simplement connexe, bornée par un contour de Jordan, est représentable conformément sur un cercle, la correspondance étant bicontinue et biuniforme même aux frontières. L'aut. démontre en chemin la proposition suivante: Si une masse positive est répartie sur une courbe C à courbure bornée et si le potentiel U qu'elle engendre admet des dérivées premières uniformément continues d'un côté de la courbe, il en est de même de l'autre côté. Avant de démontrer le théorème visé, l'aut. établit d'abord le cas particulier où la frontière est à courbure bornée, suivant une voie adoptée jadis par Riemann.

Georges Giraud (Clermont-Ferrand).

Nevanlinna, Rolf: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. 58, 295—373 (1932).

Die Arbeit stellt und löst die Aufgabe, alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen über der w -Ebene zu ermitteln, die nur endlich viele — logarithmische — Windungspunkte haben, und dann die Funktionen $z(w)$ zu konstruieren, die solche Flächen auf ein schlichtes Gebiet der z -Ebene abbilden. Dies ist einerseits ein Beitrag zur Uniformisierungstheorie, indem eine einfache, aber doch recht allgemeine Flächenklasse

völlig untersucht, typisiert und insbesondere für sie die Frage gelöst wird, ob solche Flächen auf die punktierte Ebene (parabolischer Fall) oder auf den Einheitskreis abgebildet werden können (hyperbolischer Fall). Es tritt das erste ein; damit ist eine Vermutung Speisers zum Teil bestätigt, wonach alle Flächen mit höchstens abzählbar vielen Endfolgen zum parabolischen Falle gehören. Hier fällt nämlich Endfolge und logarithmischer Windungspunkt zusammen. Andererseits handelt es sich um einen Beitrag zur Wertverteilungstheorie: Die meromorphen Umkehrfunktionen $w(z)$ zeigen nämlich bemerkenswertes Verhalten in bezug auf Ausnahmewerte. Sie liefern Beispiele von Funktionen, die für endlich viele vorgegebene Stellensorten rationalwertig vorgegebene Defekte mit der Summe 2 aufweisen. Besonders wichtig aber scheint es, neuerlich auf das Band hinzuweisen, welches sich zwischen den Theorien der Uniformisierung und der Wertverteilung immer enger knüpft. — Der Aufbau der Arbeit ist etwa folgender: Zunächst wird angenommen, es gebe eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die über den q Punkten a_k genau μ_k logarithmische Windungstellen und daneben noch gewisse schlichte Blätter hat; sei $p = \sum \mu_k$. Nach einem allgemeinen Satze der Uniformisierungstheorie gibt es eine Funktion $z(w)$, die diese Fläche schlicht abbildet. Unter wiederholter Anwendung des Monodromiesatzes auf diese Funktion $z(w)$ ergibt sich eine Reihe naheliegender notwendiger Bedingungen für die Struktur einer solchen Fläche, welche dann durch die Art beschrieben werden kann, wie sich die Fundamentalbereiche für $w(z)$ nebeneinanderlagern. Für $q = p = 2$ oder $= 3$ gibt es höchstens eine einzige solche Fläche, für jedes $p \geq 4$ dagegen unendlich viele von verschiedener Struktur, die aufgezählt werden können. — Zweitens wird gezeigt, daß alle bisher als möglich erkannten Flächen wirklich existieren. Für $p = q = 2$ handelt es sich um die Fläche des Logarithmus; es ist merkwürdig, daß die bis auf lineare Abbildung eindeutig bestimmte Fläche mit genau 3 Windungspunkten bisher noch nirgends beachtet worden zu sein scheint. Der Existenznachweis geschieht durch Konstruktion der Abbildungsfunktion in Parameterdarstellung. Dazu wird die universelle, regulär verzweigte Überlagerungsfläche der q -punktierten Ebene benutzt, die über den Punkten a_k nur logarithmische Windungspunkte hat. Ihre Uniformisierungstranszendente $\zeta(w)$ ist wohlbekannte Umkehrfunktion einer gewissen automorphen Funktion $w = \omega(\zeta)$ mit einer Gruppe S von endlicher Basis. Die Funktion $\zeta(w(z))$ bzw. ihre Umkehrung $z = z(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$ führen nun weiter. Diese ist eine automorphe, sog. fuchssoide Funktion, deren Gruppe Σ Untergruppe von S ist, aber unendlich viele Erzeugende hat. Die Untergruppe Σ kann für jeden der zuvor als möglich erkannten Strukturtypen der Fläche aus S explizite hergestellt werden. — Nun schließt drittens der Beweis an, daß zu jeder solchen Gruppe Σ wirklich eine fuchssoide Funktion existiert. Hierzu mußte wohl etwas über den klassischen Bestand an Existenztheoremen hinausgegangen werden. Die Konstruktion geschieht mit Hilfe von Näherungsgruppen Σ_n mit je endlich vielen Erzeugenden, welche die Gruppe Σ ausschöpfen. Die zugehörige Funktionenfolge $z = \varphi_n(\zeta)$ kann mittels des Koebschen Verzerrungssatzes als Normalfamilie erkannt werden, und die Grenzfunktion $\varphi(\zeta)$ hat alle erwünschten Automorphieeigenschaften. — Durch Elimination des Parameters ζ aus $\varphi_n(\zeta) = z$ und $\omega(\zeta) = w$ entsteht eine Folge rationaler Funktionen $w_n(z)$ mit μ_k mehrfachen Stellen in den Sorten a_k , deren Vielfachheit mit n gegen ∞ strebt. Hier tritt als ein neues Hilfsmittel die sog. Schwarzsche Ableitung

$$S(w) = w''/w' - \frac{1}{2}(w'/w)^2$$

herein: Sie ist an jeder einfachen Stelle von $w(z)$ regulär, hebt aber die mehrfachen Stellen dadurch heraus, daß sie dort — ohne Rücksicht auf deren Vielfachheit — einen Pol 2. Ordnung aufweist. Es ist daher für jedes n die Schwarzsche Ableitung $S(w_n)$ eine rationale Funktion vom Grade $\leq 2p$; dies muß beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten bleiben; es gilt sogar noch mehr: dabei rücken alle Pole ins Unendliche, und die rationale Funktion reduziert sich auf ein Polynom vom Grade $p-2$: Die Funktion $w(z)$, welche unsere Riemannsche Fläche als eindeutiges Bild eines schlichten Gebiets erzeugt, genügt der Differentialgleichung $S(w) = P_{p-2}(z)$ und ist in die ganze endliche Ebene eindeutig fortsetzbar (parabolischer Fall). — Schließlich werden allgemein die Lösungen einer solchen Differentialgleichung untersucht. Durch die Substitution $w' = g^{-2}$ kann ihr die homogene Differentialgleichung

$$g'' + \frac{1}{2}Pg = 0$$

zugeordnet werden; diese hat ganze Lösungen, jene meromorphe, die als Quotienten zweier linear unabhängigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung darstellbar sind. Hier eröffnet sich ein zweiter Zugang zu den gesuchten Funktionen. Die Differentialgleichungen gestatten nach Methoden von Einar Hille asymptotische Integration, welche Aussagen über die Wertverteilung und Berechnung der Defekte ermöglicht. In hinreichend einfachen Fällen gelingt sogar explizite Konstruktion der Funktionen $w(z)$, so im Falle $p = 4$, der am Schlusse der Arbeit ins einzelne durchgeführt ist. Eine besondere, sehr interessante Diskussion gilt der Frage, wie sich die eingangs als möglich erkannten Strukturtypen der Flächen in Abhängigkeit von den Koeffizienten des Polynoms $P(z)$ ergeben.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Ahlfors, Lars: Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. *Acta math.* 58, 375—406 (1932).

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem, das im vorstehenden Referat besprochen wurde. Verf. kann die Benutzung der Schwarzschen Ableitung und die asymptotische Integration der Differentialgleichung $S(w) = P_{p-2}(z)$ bzw. $g'' + \frac{1}{2}Pg = 0$ durch Methoden der konformen Abbildung ersetzen. Er erzielt die erwähnten Ergebnisse über den parabolischen Fall und die Wertverteilung der Funktionen $w(z)$, welche Riemannsche Flächen mit endlich vielen logarithmischen Windungspunkten erzeugen, mit Hilfe der von ihm entwickelten Methoden der geometrischen Funktionentheorie. Von der Betrachtung der Parameterdarstellung und des Fundamentalgebiets der durch die Untergruppe Σ erfaßten fuchsoiden Funktion her liegt es nahe, die z -Ebene durch gewisse Kurven auszuschöpfen, welche eine Berechnung der Defekte sehr leicht gestatten. Die Theorie der Wertverteilung schreibt jedoch vor, die z -Ebene durch konzentrische Kreise auszuschöpfen: Die erwähnten Methoden gestatten zu zeigen, daß beide Arten der Ausschöpfung hier zum gleichen Ergebnis für die Defekte führen. Sie eröffnen allgemeiner einen Zugang zur Kenntnis des asymptotischen Verhaltens einer fuchsoiden Funktion in der Nähe einer Ecke des Fundamentalgebiets aus dessen Gestalt heraus.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Calugaréano, Georges: Sur les valeurs exceptionnelles, au sens de M. Picard et de M. Nevanlinna, des fonctions méromorphes. *C. R. Acad. Sci., Paris* 195, 22—23 (1932).

Hat eine meromorphe Funktion $f(z)$ Ausnahmewerte, so kann einfach erschlossen werden, daß auch jede rationale Funktion von f Ausnahmewerte besitzt, deren Defekte sich angeben lassen.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Fekete, M.: Über die Verallgemeinerung der Picard-Landauschen und Picard-Schottkyschen Sätze auf Reihen, die nach Potenzen eines Polynoms fortschreiten und Polynome niedrigeren Grades zu Koeffizienten haben. *Math. Ann.* 106, 595—616 (1932).

Sei $F(x) = a_0(x) + a_1(x)\omega(x) + a_2(x)\omega(x)^2 + \dots$ eine Reihe der im Titel angegebenen Art. Der Verf. hatte früher bewiesen: Wenn die Reihe für $|\omega(x)| < R$ konvergiert und $F(z)$ daselbst von 0 und 1 verschieden ist, wenn ferner $|a_0(x)| \leq \lambda$ für alle Wurzeln der Gleichung $\omega(x) = 0$ und $0 < \vartheta < 1$, so liegt der Betrag von $F(z)$ für $|\omega(x)| \leq \vartheta R$ unter einer Schranke, die nur von λ, ϑ und vom Grade k des Polynoms $\omega(x)$ abhängt. Dabei wurde vorausgesetzt, daß der Lemniskatenbereich $|\omega(x)| \leq R$ aus einem Stücke besteht. Man erhält ebenso eine ähnliche Verallgemeinerung des Picard-Landauschen Satzes. — In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verf., daß aus den Voraussetzungen dieser Sätze die einschränkende, dem genannten Lemniskatenbereich betreffende Bedingung gestrichen werden kann, was einen erheblichen Fortschritt bedeutet.

Ahlfors (Paris).

Cartan, Henri, und Peter Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. *Math. Ann.* 106, 617—647 (1932).

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bilden die Cartanschen Untersuchungen über die Regularitätsbereiche und die Thullenschen über die Regularitätshüllen. Die Methoden dieser Arbeiten werden hier ineinander verflochten und zum Aufbau einer einheitlichen Theorie verwandt. — Zu Beginn der Arbeit werden mit Hilfe von dem vierdimensionalen Raume überlagerten Polzyklindern die allgemeinen Bereiche definiert, die zum Aufbau der ein- und mehrdeutigen analytischen Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$ benötigt werden. Hier sind schon eine Reihe von Schwierigkeiten zu überwinden, die wir beim Aufbau der Riemannschen Flächen in der klassischen Funktionentheorie nicht kennen. Dann wird der Begriff der Regularitätsbereiche eingeführt (genaue Existenzbereiche analytischer Funktionen). Unter einer Klasse \mathfrak{A} in \mathfrak{B} regulärer Funktionen wird eine Menge von in \mathfrak{B} analytischen Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$ verstanden, bei denen mit $f(z_1, \dots, z_n)$ auch alle partiellen Ableitungen und alle Funktionen A^h für alle A und alle ganzen positiven h zur Menge gehören. Sodann kommt der wichtigste Begriff: Der Durchschnitt B der Regularitätsbereiche aller Funktionen der Klasse \mathfrak{A} aus \mathfrak{B} heißt die \mathfrak{A} -konvexe Hülle von \mathfrak{B} . Besteht \mathfrak{A} aus allen in \mathfrak{B} regulären Funktionen, so heißt B die Regularitätshülle des Bereiches \mathfrak{B} . Die Zuordnung der Regularitätshülle ist invariant gegenüber analytischen Abbildungen. Ist \mathfrak{B} beschränkt, so ist auch B beschränkt. — Nunmehr wird die

\mathfrak{K} -Konvexität eines Bereiches definiert. Das wird dann grundlegend beim Fundamentalsatz (dessen Formulierung kompliziert ist) gebraucht. Aus ihm folgt unmittelbar: Ist ein Bereich \mathfrak{B} nicht \mathfrak{K} -konvex, so gibt es einen Randpunkt P auf \mathfrak{B} und dazu einen Polyzylinder \mathfrak{P} um P , in dem alle Funktionen der Klasse noch regulär sind. (Über einen Bereich, der kein \mathfrak{K} -konvexer Bereich ist, lassen sich alle Funktionen der Klasse gleichzeitig fortsetzen.) In \mathfrak{B} ist der Absolutbetrag jeder Funktion der Klasse \mathfrak{K} kleiner als in einem gewissen festen Bereich \mathfrak{B}_0 , der ganz im Innern von \mathfrak{B} liegt. Schließlich folgt noch: Jeder \mathfrak{K} -konvexe Bereich ist ein Regularitätsbereich (oder ein Überlagerungsbereich von Regularitätsbereichen). — Ein Normalitätsbereich wird definiert als größter Bereich, in dem eine Familie analytischer Funktionen normal (im Sinne von Montel) ist. Der Konvergenzbereich einer Folge analytischer Funktionen ist insbesondere ein solcher Normalitätsbereich. Eine normale Familie heißt von erster Art, wenn sie keine Teilfolge enthält, die gegen die Konstante ∞ konvergiert, andernfalls heißt sie von zweiter Art. Die Lösung des von Julia in seiner Acta-Arbeit 1926 aufgestellten grundlegenden Problems lautet nun: Der Normalitätsbereich einer normalen Familie \mathfrak{F} ist ein Regularitätsbereich, falls \mathfrak{F} erster Art, ein Meromorphiebereich, falls \mathfrak{F} zweiter Art ist. — Zum Schlusse der Arbeit werden Anwendungen auf Kreiskörper und Hartogssche Körper gemacht, der Runge'sche Satz besprochen und eine Bedingung für echte Regularitätshüllen (d. s. Bereiche, die nicht nur von sich selbst Hüllen sind) angegeben. Behnke (Münster i. W.).

Kneser, Hellmuth: Ein Satz über die Meromorphiebereiche analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen. Math. Ann. **106**, 648—655 (1932).

Verf. gibt einen Beweis des von Hartogs und E. E. Levi für zwei komplexe Veränderliche bewiesenen „Kontinuitätssatzes“ für Funktionen von n Veränderlichen, und zwar in der sehr allgemeinen Fassung, die er diesem Satze (für $n = 2$) in einer kürzlich erschienenen Arbeit gegeben hat [vgl. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **41**, 164—168 (1932) und dieses Zbl. **3**, 408]: „Ist \mathfrak{B} ein beschränktes Gebiet der z -Ebene mit Einschluß seines Randes \mathfrak{C} , und ist die Funktion $f = f(w_1, \dots, w_n; z)$ meromorph für $|w_v - a_v| \leq R$ ($R > 0$) und z auf \mathfrak{C} ; gibt es ferner zu jedem positiven ε Werte w'_v mit $|w'_v - a_v| < \varepsilon$ derart, daß f für $w_v = w'_v$ und z in \mathfrak{B} meromorph ist, so ist f meromorph für $w_v = a_v$ und z in \mathfrak{B} .“ Thullen.

Kneser, Hellmuth: Die singulären Kanten bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. **106**, 656—660 (1932).

Verf. verallgemeinert den zuerst von Behnke für Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen bewiesenen und dann von ihm selbst verschärften „Kantensatz“ [vgl. Behnke, Abh. math. Semin. d. Hamburg. Univ. **4** (1926) und Kneser, ebenda, **5** (1927)] auf Funktionen von n Veränderlichen: „ $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ seien zwei zweimal stetig differenzierbare $(2n - 1)$ -dimensionale Hyperflächenstücke, die sich in einem Punkte P schneiden mögen; in P seien weder die ersten Ableitungen von Φ noch die von Ψ gleich Null, noch seien die ersten Ableitungen von Φ denen von Ψ proportional; die $(2n - 2)$ -dimensionale Schnittmannigfaltigkeit von Φ und Ψ sei mit \mathfrak{S} bezeichnet. Gibt es dann eine Funktion $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, die in einer Umgebung von P , soweit für deren Punkte $\text{Max}(\Phi, \Psi) > 0$ gilt, meromorph ist, so ist die „Kante \mathfrak{S} ein analytisches Flächenstück.“ Der Beweis wird mit Hilfe des verallgemeinerten Kontinuitätssatzes (vgl. das vorangehende Referat) geführt. Thullen (Münster, Westf.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Deltheil, R.: Probabilités géométriques. Scientia **52**, 1—10 (1932).

Cowan, Donald R. G.: A note on the coefficient of part correlation and of correlation of a dependent variable with all but one of a group of other variables. J. Amer. Statist. Assoc. **27**, 177—179 (1932).

Montessus de Ballore, R. de: Statistique mathématique. Les moments partiels du second ordre de la fonction binomiale. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **52**, 70—82 (1932).

Verf. behandelt in Fortführung seiner seit 1928 in den Ann. Soc. Sci. Bruxelles veröffentlichten Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit wichtige, für die Durchführung seiner Methoden notwendige Beziehungen zwischen den partiellen Momenten zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
s'(0, \tfrac{1}{2}) &= y_{1+h} + y_{3+h} + y_{5+h} + \dots, & s''(0, \tfrac{1}{2}) &= y_{-1+h} + y_{-3+h} + y_{-5+h} + \dots, \\
s'(0, \tfrac{2}{3}) &= y_{2+h} + y_{4+h} + y_{6+h} + \dots, & s''(0, \tfrac{2}{3}) &= y_{-2+h} + y_{-4+h} + y_{-6+h} + \dots, \\
s'(1, \tfrac{1}{2}) &= y_{1+h} + 3y_{3+h} + 5y_{5+h} + \dots, & s''(1, \tfrac{1}{2}) &= y_{-1+h} + 3y_{-3+h} + 5y_{-5+h} + \dots, \\
s'(1, \tfrac{2}{3}) &= 2y_{2+h} + 4y_{4+h} + 6y_{6+h} + \dots, & s''(1, \tfrac{2}{3}) &= 2y_{-2+h} + 4y_{-4+h} + 6y_{-6+h} + \dots.
\end{aligned}$$

Neben den exakten Formeln werden für numerische Berechnungen außerordentlich brauchbare Näherungsformeln gegeben

$$\left(y_x = \frac{m!}{(mp-x)! \cdot (mq+x)!} p^{mp-x} q^{mq+x}\right). \quad F. Knoll \text{ (Wien).}$$

Ibseh, Werner: Ein Beitrag zu Untersuchungen über die Anpassungsgüte von Häufigkeitsverteilungen. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 93—113 (1932).

Es wird eine Rekursionsformel zur Errechnung des k -ten Momentes einer Bernoulliverteilung abgeleitet; ferner wird der mittlere Fehler des Pearsonschen Ausdrucks χ^2 elementar berechnet. In einer Diskussion über die praktische Anwendbarkeit des χ^2 -Kriteriums sucht Verf. durch Betrachtung der mittleren quadratischen Abweichung von der mathematischen Hoffnung die Beurteilung von „guten“ und „schlechten“ Anpassungen zu begründen. Er gelangt zur selben Grenze (dem Wert 0,1 für die Pearsonsche Wahrscheinlichkeit), die Elderton und Rietz aus Gründen der Erfahrung angegeben haben.

Willy Feller (Kiel).

Robb, Richard A.: The effect of change of origin in type A series. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 1, Nr 8, 1—12 (1932).

Robb, Richard A.: The application of type A series to skew curves. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 1, Nr 9, 1—10 (1932).

Die Darstellung der Häufigkeitsfunktion, die hier A -Type genannt wird (oft mit Charliers oder Bruns' Namen bezeichnet, aber zuerst von Thiele 1889 gegeben), leidet an dem Mangel, daß die Glieder nicht in regelmäßiger Folge abnehmen. Von zweiter Ordnung ist das 3. Glied, von dritter Ordnung aber sowohl das 4. als auch das 6. Glied. Verf. gibt eine Transformation, die nach Hermiteschen Polynomen fortschreitet, wo dem genannten Mangel abgeholfen ist. — In der erstgenannten Abhandlung wird eine Berechnungserleichterung eingeführt.

Burrau (Kopenhagen).

Hojo, Tokishige: Distribution of the median, quartiles and interquartile distance in samples from a normal population. Biometrika 23, 315—360 (1931).

Wenn man aus einer statistischen Masse (population) n Proben (Beobachtungen) herausgreift und dieselben der Größe nach ordnet („ranked individuals“, siehe Titel des nachstehenden Referats), entsteht das Problem von dem Verteilungsgesetz dieser n Beobachtungen (samples) und die Variation dieses Verteilungsgesetzes mit n . Schon Galton hat die Bedeutung dieses Problems für die Biologie und verwandten Gebiete gefühlt, und nachher ist das Problem von mehreren Seiten angegriffen worden, darunter von Bortkiewicz, der den Namen „Variationsbreite“ („range“) für die Differenz der größten und kleinsten der Beobachtungen einführte. Für größere Zahlen n („large samples“), d. h. wenn $n^{-3/2}$ vernachlässigt werden kann im Vergleich mit $n^{-1/2}$, ist die Theorie von Pearson gegeben, und dieser hat den Verf. dazu angeregt, die Frage für kleine n („small samples“) zu untersuchen. Die n Beobachtungen nach Größe geordnet, heißen x_1, x_2, \dots, x_n und die Mediane, m , ist dann die $p+1$ te der Größen, wenn $n = 2p+1$ und gleich $\frac{1}{2}(x_p + x_{p+1})$ wenn $n = 2p$. Es wird nun der mittlere Fehler σ_m und die höheren Charakteristika des Verteilungsgesetzes für m und für die „Quartilen“ usw. sowohl theoretisch hergeleitet als auch mit Experimenten verglichen, und zwar besonders für die Werte von n zwischen 2 und 12. (Siehe folgendes Referat.)

Burrau (Kopenhagen).

Pearson, Karl: On the mean character and variance of a ranked individual, and on the mean and variance of the intervals between ranked individuals. I. Symmetrical distributions (normal and rectangular). Biometrika 23, 364—397 (1931).

In den Problemen von den „ranked individuals“ (siehe vorstehendes Referat)

spielt der Umfang n (s. vorsteh. Ref.) eine große Rolle, und sehr wesentlich ist es praktisch, entscheiden zu können, wann wir die Beobachtungen (the sample) als „viele“ (large sample) behandeln können, d. h. wenn wir unsere Mittelwerte, mittlere Fehler und höhere Charakteristika des Verteilungsgesetzes ihren asymptotischen Werten beilegen können. Nach der vorerwähnten Arbeit Hojos wünscht nun Pearson die schon gewonnenen Resultate zu vervollständigen, und zwar nach einer etwas variierten Methode. Mit ${}_n x_q$ bezeichnet Verf. die mittlere Position des q ten Individuums eines „ranked sample“ vom Umfange n . Die Größe ${}_n \bar{x}_q$ (und zwar in Einheiten des mittleren Fehlers σ der zugrunde liegenden Masse gemessen) wird nun theoretisch entwickelt und mit Hojos Resultaten verglichen. *Burrau* (Kopenhagen).

Pearson, Karl, and Margaret v. Pearson: On the mean character and variance of a ranked individual, and on the mean and variance of the intervals between ranked individuals. Pt. II. Case of certain skew curves. *Biometrika* 24, 203—279 (1932).

Die Gedankengänge der Arbeiten von Hojo (vgl. vorst. Ref.) und Pearson (vgl. vorst. Ref.) werden hier auf gewisse unsymmetrische Verteilungen von der Form $y = N/\sigma \cdot e^{-x/\sigma}$ erweitert. Als Hilfsmittel sind numerische Tafeln von $1/n$, $1/n^2$, $1/n^3$ und $1/n^4$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 100$) und Tafeln von Summationen derselben (von Verff. Di-, Tri-, Tetra- und Pentabetafunktion genannt) gegeben. — Eine Reihe von numerischen Beispielen der entwickelten algebraischen Formeln werden gegeben, damit verschiedene Formen der Unsymmetrie numerisch geklärt werden können.

Burrau (Kopenhagen).

Craig, Allen T.: On the distributions of certain statistics. *Amer. J. Math.* 54, 353 bis 366 (1932).

Formeln für die Verteilungsgesetze des arithmetischen, harmonischen, geometrischen und anderer Mittel, zur Theorie der „small samples“ gehörend, werden aufgestellt. (Siehe die Referate in dies. Zbl. 2, 199 u. 200 sowie die vorstehenden Referate.) Einige Anwendungen auf nichtnormale Verteilungen werden gemacht.

Burrau (Kopenhagen).

Craig, Allen T.: The simultaneous distribution of mean and standard deviation in small samples. *Ann. math. Statist.* 3, 126—140 (1932).

Schließt sich dem Gedankengang des vorstehenden Referates an. Es wird die algebraische Durchrechnung für $n = 2, 3$ und 4 durchgeführt. *Burrau* (Kopenhagen).

Wilson, Edwin B., Margaret M. Hilferty and Helen C. Maher: Goodness of fit. *J. Amer. Statist. Assoc.*, N. s. 26, 443—448 (1931).

Wilson, Edwin B., and Margaret M. Hilferty: The distribution of chi-square. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 17, 684—688 (1931).

Zwei Aufsätze, die die Pearsonsche „test for goodness of fit“ [*Philos. Mag.* 50, 157 (1900)] in gewissen Beziehungen auszubauen versuchen und Annäherungswerte der χ -Größe in gewissen Fällen geben.

Burrau (Kopenhagen).

Lundberg, F.: Some supplementary researches on the collective risk theory. *Skand. Aktuarie Tidskr.* 15, 137—158 (1932).

Verf. erweitert in der vorliegenden Arbeit die von ihm stammende kollektive Risikotheorie (vgl. F. Lundberg, *Försäkringsteknisk riskutjämning*, Stockholm, 1926; I. Laurin, *An introduction into Lundbergs theory of risk*, *Skand. Aktuarie Tidskr.* 1930; H. Cramer, *On the mathematical theory of risk*, Part III, *Försäkringsaktiebolaget Skandia*, Stockholm, 1930) insofern, als er sich von einer Reihe beschränkender Annahmen frei macht und Formeln für die Größe $\alpha_q(x_0)$ aufstellt. Während seine bisherigen Untersuchungen unveränderliche Risikoverteilungen voraussetzten, weist er jetzt bei veränderlicher Risikoverteilung das Bestehen der wichtigen Ungleichung $\delta(x_0) < e^{-Rx_0}$ nach. Bisher waren nur Verteilungen mit positiver Risikosumme zugelassen; in der neuen Untersuchung wird gezeigt, daß auch negative Risikosummen keine Schwierigkeiten machen.

F. Knoll (Wien).

Escher, Fredrik: On the probability function in the collective theory of risk. Skand. Aktuarie Tidskr. 15, 175—195 (1932).

In der vorliegenden Untersuchung wird der Zusammenhang zwischen der aus der Lundbergschen Risikotheorie bekannten Funktion $F(x, P)$ und der „Risikofunktion“ $s(x)$ studiert. Durch Einführung der Funktion $\bar{s}(x)$ durch die Definition $d\bar{s}(x) = \frac{e^{hx}}{v_u} ds(x)$ gelangt man zu der Formel

$$F(xP, P) = e^{-P\psi} \int_0^{xP} e^{-h(z-xP)} d\bar{F}(z, P\nu_0) = 1 - e^{-P\psi} \int_{xP}^{\infty} e^{-h(z-xP)} d\bar{F}(z, P\nu_0).$$

Entwickelt man die Funktion $\bar{F}(z, P\nu_0)$ in eine Brunssche Reihe und begnügt sich mit dem ersten Gliede, so zeigt Esscher, daß man zu einer von Lundberg stammenden asymptotischen Formel gelangt. Nimmt man noch ein weiteres Glied der Brunsschen Entwicklung (das Glied mit $\Phi'''(t)!$) hinzu, so ergibt sich, wie an einer Reihe wichtiger numerischer Sonderfälle gezeigt wird, eine recht brauchbare Approximation. Knoll.

Picard, Robert: Bemerkungen zu der Lidstoneschen Z-Methode. Bl. Versich.-Math. 2, 276—281 (1932).

Der Verf. untersucht an 4 Sterbetafeln die Genauigkeit der Lidstoneschen Z-Methode. In mittelbarem Zusammenhang hiermit beweist er den Satz, daß 2 Funktionen, deren Mittelwerte in jedem beliebigen Intervall bei demselben Abszissenwert liegen, durch eine lineare Gleichung miteinander verbunden sein müssen.

J. v. Behr (Berlin).

Geometrie.

White, C. E.: The inscription of a 17-gon. Tôhoku Math. J. 35, 237—241 (1932). Verf. gibt ein Verfahren zur Konstruktion des 17-Ecks an, das etwas anders ist als die bisher bekannten Verfahren. U. Wegner (Darmstadt).

Thébault, V.: La sphère de Longchamps du tétraèdre. Mathesis 46, 223—229 (1932).

Kubota, Tadahiko: Ein Beweis des Aiyarschen Satzes über den orthopolaren Kreis. Tôhoku Math. J. 35, 257—259 (1932).

Der Kegelschnitt K sei einem Dreieck einbeschrieben, K' sei mit K konfokal und berühre die Gerade l . Dann wird der orthoptische Kreis von K und K' von dem zu l in bezug auf das Dreieck orthopolaren Kreis senkrecht geschnitten. E. A. Weiss.

Thébault, V.: Sur le triangle podaire. Gaz. mat. 37, 401—402 (1932).

Karl, Mary Cordia: The projective theory of orthopoles. Amer. Math. Monthly 39, 327—338 (1932).

Projektive Herleitung einer Reihe meist bekannter Sätze über Lotpunkte.

Moufang (Frankfurt).

Grünbaum, M.: Bemerkenswerte Probleme der Dreiecksgeometrie, die mit den Berührungskreisen zusammenhängen. Bol. Mat. (Baidaff) 4, 74—76 (1931) [Spanisch].

Toda, Kiyoshi: An application of certain geometrical transformation, especially on poristic theorems. J. Sci. Hiroshima Univ. A 2, 117—126 (1932).

(K_i) ($i = 1, 2, \dots$) sei eine Folge von Kreisen, die sämtlich zwei Kreise A, B berühren und deren jeder seinen Vorgänger berührt. Die Folge heiße periodisch, wenn es ein $i \neq 1$ gibt, so daß K_i mit K_1 zusammenfällt. Dann hat Steiner bewiesen: Bei festen A, B sind entweder alle Folgen (K) periodisch oder keine. Die deutliche Verwandtschaft dieses Satzes mit den Ponceletschen Schließungssätzen legt nahe, den einen Satz aus dem anderen durch ein direktes synthetisches Abbildungsverfahren abzuleiten. Verf. gibt ein solches Verfahren durch Kombination von zyklographischer Abbildung (der Kreise auf die Punkte einer hyperbolischen Cayleyschen Raummetrik) und Projektionen und Schnitten. Hierbei werden mehrere Sätze über Tangentenpolygone einer Kugel teils neu entdeckt, teils unter neuen Gesichtspunkten dargestellt.

Das Transformationsverfahren wird auch auf andersartige Sätze, z. B. den Brianchonschen Satz im Ebenenbündel angewandt. *Cohn-Vossen* (Köln).

Pineda, Pedro de: Die Affinität in der Ebene als Produkt einer Bewegung und einer Homologie. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. 7, 31—33 (1932) [Spanisch].

Moufang, Ruth: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecksnetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander. (Das A -Netz.) *Math. Ann.* 106, 755—795 (1932).

Ein A -Netz entsteht aus einem Möbiusschen Netze durch Adjunktion eines Punktes, der auf einer Netzgeraden liegt. Es wird gezeigt, daß sich die Schnittpunktsätze des A -Netzes alle aus dem Satze vom vollständigen Vierseit mit Hilfe der ebenen projektiven Axiome der Verknüpfung ableiten lassen, und zwar genügt es, diesen Satz in einer stark spezialisierten Form vorauszusetzen. Dagegen ist es unmöglich, die Schnittpunktsätze des A -Netzes aus denen des Möbiusschen Netzes abzuleiten. Ob der allgemeine Desarguessche Satz eine Folgerung des Vierseitsatzes ist, bleibt noch unentschieden. Da aber umgekehrt der Vierseitsatz aus dem Desarguesschen Satze folgt, kann der Pascalsche Satz keine Folgerung des Vierseitsatzes sein, und es reichen deshalb sicher die Schnittpunktsätze des A -Netzes noch nicht zur Begründung der allgemeinen ebenen projektiven Geometrie aus. Das wichtigste Beweismittel der Untersuchung ist die Hilbertsche Streckenrechnung (Grundlagen der Geometrie, Kap. V.). Da hier aber nur die Gültigkeit des Vierseitsatzes vorausgesetzt ist, wird das Assoziativgesetz der Multiplikation nur für spezielle Fälle bewiesen und benutzt.

Friedrich Levi (Leipzig).

Morley, Frank: Second note on the celestial sphere. *Amer. J. Math.* 54, 489—492 (1932).

Neues Beispiel zu dem in dies. Zbl. 4, 126 angegebenen Übertragungsprinzip: Eine Punktverwandtschaft des Fundamentalkegelschnittes wird auf die Riemannsche Kugel übertragen und auf die Kongruenz der zu ihr orthogonalen Bögen abgebildet, welche zugeordnete Punkte verbinden. Brennfläche (-kurve) einer Verwandtschaft heißt dann der Ort der Schnittpunkte konsekutiver Bögen. Brennfläche einer projektiven und Brennkurve einer antiprojektiven Verwandtschaft. *E. A. Weiss* (Bonn).

Rehbock, F.: Zur ebenen Strahlengeometrie vom euklidischen oder pseudoeuklidischen Typus. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 41, 255—269 (1932).

Unter ebener Strahlengeometrie vom euklidischen oder pseudoeuklidischen Typus versteht der Verf. das Ergebnis einer dualen Übertragung der euklidischen (pseudoeuklidischen) Metrik in der Ebene. Diese Geometrie ist demnach durch die Gruppe der (komplexen) automorphen Kollineationen eines Geradenpaares bestimmt. Es wird an der Hand einer vollständigen Klassifizierung eine Terminologie für die den (komplexen) Bewegungen, Umlegungen und Ähnlichkeiten dual entsprechenden Transformationen eingeführt. Ein Abbildungsverfahren liefert anschauliche Bilder der Struktur der zugrunde liegenden Transformationsgruppe.

E. Kruppa (Wien).

Dieudonné, J.: Sur les faisceaux conjugués. *Mathesis* 46, 197—206 (1932).

Fortsetzung der in dies. Zbl. 3, 67 besprochenen Note. Es seien in der Ebene sechs Punkte $A, B, C; A', B', C'$ gegeben. Gefragt wird nach dem Ort der Punkte, für die die beiden Geradentripel PA, PB, PC und PA', PB', PC' konjugiert im Sinne der früheren Note sind. (Vgl. das genannte Ref.) Dieser Ort erweist sich als Kurve 4. Ordnung, die einschließlich der Ausartungsfälle diskutiert wird. *W. Fenchel*.

Paequement: Sur la figure formée par une quadrique et deux droites. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 194, 2267—2269 (1932).

F sei Brennpunkt einer ebenen bizirkularen C^4 . Eine Isotrope durch F enthält 3 weitere Brennpunkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und berührt C^4 in einem Punkte α . Die Doppelverhältnisse D.V. $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ und D.V. $(F, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ werden als Inversionsinvarianten der C^4 erkannt. Zwei ebene C^4 , die durch Projektion ein- und derselben C^4_1 entstanden sind, haben dieselben D.V.; ebenso die ebenen Schnitte der Regelfläche, welche die einer linearen Kongruenz angehörigen Tangenten einer („absoluten“) F^2 erzeugen.

Die geometrische Deutung einer der beiden D.V. führt hier zu dem Satz: Der Wurf, den die absoluten Ebenen der ersten Leitgeraden und ihre Verbindungsebenen mit den absoluten Punkten der zweiten bestimmen, ist gleich dem für die zweite Leitgerade entsprechend definierten Wurf. E. A. Weiss (Bonn).

Garver, Raymond: A note concerning a transformation on the Brioschi quintic. Tôhoku Math. J. **35**, 253—256 (1932).

Einfachere Herleitung der Transformation der Brioschischen Form 5. Grades in die Gestalt $y^5 + 5ay^2 + 5by + c$ (vgl. dieses Zbl. **2**, 8). van der Waerden.

Zariski, Oscar: On a theorem of Eddington. Amer. J. Math. **54**, 466—470 (1932).

Der von Eddington bewiesene Satz über Systeme von vierreihigen Matrizes mit $F_i^2 = -1$, $F_i F_j = -F_j F_i$ (vgl. dies. Zbl. **3**, S. 337) wird aus einem Satz von Study über die möglichen Abelschen Gruppen von involutorischen Raumkollineationen hergeleitet. Das von Eddington angegebene System von fünf Matrizes F_i gehört zu der Kollineationsgruppe der Kummerschen Konfiguration. van der Waerden (Leipzig).

Paul, Marcel: Sur les points triples des surfaces algébriques. Mathesis **46**, 215—218 (1932).

Wiman, A.: Über die Regelflächen sechsten Grades ohne Leitgerade. Acta math. **59**, 1—62 (1932).

Le mémoire contient la classification des surfaces R_6 désignées au titre suivant les propriétés de leurs lignes multiples. L'auteur se borne aux surfaces 1° qui appartiennent à un complexe linéaire ou 2° qui possèdent une conique directrice et donne 67 types différents de R_6 dont les deux se rattachent aux surfaces du genre 2, les dix — aux celles du genre 1 et tous les autres — aux surfaces R_6 rationnelles. Comme un mode de raisonnement, il emploie la représentation des droites d'un complexe par les points de l'espace ordinaire par les relations

$$x_1x + y_1y + w_1w = 0, \quad y_1x + z_1y + w_1z = 0$$

qui font correspondre aux points (x_1, y_1, z_1, w_1) les droites d'un complexe linéaire $p_{14} + p_{34} = 0$ et aux points (x, y, z, w) — les droites du complexe quadratique spécial avec une conique directrice $p_{14}p_{34} - p_{21}^2 = 0$. Le mémoire peut être considéré comme une suite de l'article de l'auteur [„Über die Regelflächen mit einer Leitgeraden“, Acta math. **57** (1931); voir Zbl. **3**, 24]. La plupart des résultats est contenu dans sa thèse („Klassifikation af regelytorna af sjette graden“, Lund 1892). S. Finikoff.

Lehr, Marguerite: Regular linear systems of curves with the singularities of a given curve as base points. Amer. J. Math. **54**, 471—488 (1932).

1. If $f(x, y) = 0$ be irreducible of order m , with only ordinary k -fold points O , and if μ be the maximum integer such that $k\mu < (i+1)m$, ($i = 0, 1, \dots, k-2$), then all complete systems of curves of orders $m-3, m-4, \dots, m-3-\mu$ with $(k-2-i)$ -fold points in all points O are regular, i. e. their virtual dimension is equal to their effective dimension. 2. If $f(x, y)$ be irreducible of order m , with singular points O , each of which is the origin of one branch of order k and class 1, and if μ be the maximum integer such that $k(k+1)\mu < (ik+i+1)m$, then all complete systems of curves of orders $m-3, m-4, \dots, m-3-\mu$ with $(k-1-i)$ -fold points in all points O are regular. The proofs of these theorems and of some generalisations are based upon the calculation of the irregularity $p_g - p_n$ of the surface $z^n = f(x, y)$. Also a necessary and sufficient condition that this surface be irregular is given for different cases of the singularities of $f = 0$. van der Waerden (Leipzig).

Campedelli, L.: Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 536—542 (1932).

Einige besondere Flächentypen, die sich bei der Klassifikation der Doppelbenen mit Verzweigungskurve 10. Ordnung (vgl. dieses Zbl. **4**, 161) ergaben, werden näher untersucht. Die Verzweigungskurven werden wirklich konstruiert und die invarianten

Charaktere der Flächen berechnet. Insbesondere erhält man so reguläre Flächen mit $p_g = 0$ und $p^{(1)} = P = 2$ oder 3 . van der Waerden (Leipzig).

Godeaux, Lucien: Sur quelques quadriques associées aux points d'une surface. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 109—120 (1932).

L'auteur généralise la définition donnée par M. Bompiani des quadriques associées à un point x d'une surface (x) . Si Q est l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions qui représente les droites de l'espace S_3 , les points U, V de Q qui représentent les tangentes asymptotiques en un point x de la surface (x) de S_3 , sont consécutifs dans une suite de Laplace $\dots U_3, U_2, U_1, U, V, V_1, \dots$. Les lignes principales de C. Segre des surfaces U_n, V_n dans S_5 correspondent. En omettant deux familles qui correspondent toujours aux asymptotiques de la surface (x) , les trois autres [au cas des surfaces $(U), (V)$] représentent les réglées, lieux des tangentes asymptotiques aux points de lignes de Darboux de (x) . Les plans osculateurs aux courbes de (U) qui correspondent à une ligne de Darboux et à une ligne de Segre conjuguées se coupent suivant une droite et les trois droites ainsi obtenues pour les trois lignes de Darboux sont dans un même plan. Ce plan coupe l'hyperquadrique Q suivant une conique qui représente la première demi-quadrique de M. Bompiani, on obtient la seconde par les mêmes considérations sur la surface (V) . — L'auteur introduit les nouvelles quadriques associées à la surface (x) en remplaçant les surfaces (U) et (V) par (U_n) et (V_n) . S. Finikoff (Moscou).

Godeaux, Lucien: Sur l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface cubique ayant trois points doubles biplanaires. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 405—411 (1932).

La surface cubique possédant trois points doubles biplanaires est isothermo-asymptotique, et ses quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques; la seconde nappe de l'enveloppe de ces quadriques est une surface qui se déduit de la première par une homologie harmonique. Sur l'hyperquadrique de S_5 qui représente les droites de l'espace, les tangentes asymptotiques des deux nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie donnent lieu à des réseaux à invariants égaux, appartenant à une suite de Laplace de période six, et tracés sur des surfaces rationnelles du sixième ordre (déjà rencontrées par M. Togliatti, Commentarii Mathem. Helvetici, 1929, t. I). Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 26—37 (1932).

Ein Beispiel einer Fläche mit $p_a = p_g = 0$ und $p^{(1)} = P_2 = 2$. Die Fläche wird konstruiert als Bild einer Involution 5. Ordnung auf einer Fläche 5. Ordnung. Ein projektives Bild ist eine Fläche 7. Ordnung, die einem Tetraeder umschrieben ist und vier von dessen Kanten doppelt enthält. van der Waerden (Leipzig).

Godeaux, Lucien: Sur les asymptotiques de la surface de Steiner. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1, 85—87 (1932).

Sur l'hyperquadrique de S_5 qui représente les droites de l'espace ordinaire, les tangentes asymptotiques d'une surface F de Steiner se représentent avec les points d'une surface Φ d'ordre 21. Entre F et Φ on a une correspondance $(1, 2)$; et, comme transformés du système des lignes asymptotiques de F , on obtient sur Φ deux réseaux consécutifs d'une suite de Laplace, projectifs entre eux, et chacun des quels est constitué par des courbes rationnelles du sixième et du huitième ordre.

Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur certaines involutions du sixième ordre appartenant à une surface de genres un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 311—321 (1932).

L'Auteur démontre le théorème suivant: Si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possède une involution cyclique d'ordre trois et de genres un et une involution rationnelle d'ordre deux dont les transformations génératrices respectives T et θ_1 vérifient la relation $T\theta_1 = \theta_1 T^2$; si de plus il existe sur la surface un système linéaire sans point-base composé au moyen des deux involutions et qui ne soit pas contenu dans un

système plus ample composé au moyen d'une de ces involutions, le système linéaire en question a le degré six, le genre quatre et la dimension deux. *P. Dubreil (Lille).*

Godeaux, Lucien: Construction d'un plan double de genres un et de rang trois. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 1, 64—66 (1932).

L'un des plans doubles qui représentent une involution d'ordre trois appartenant à une surface de genres un, possède une courbe de diramation du huitième ordre ayant deux points quadruples et six points de rebroussement. Ce plan double est birationnellement équivalent à une quadrique double Q_0 ayant une courbe de diramation du huitième ordre, Γ , qui possède six points de rebroussement A_1, A_2, \dots, A_6 . Il existe ∞^1 biquadratiques C passant par les points de rebroussement A et touchant la courbe Γ en deux points variables. En supposant que les six points A déterminent une cubique gauche irréductible K n'appartenant pas à Q_0 , l'auteur indique une construction de cette quadrique double, montre que les biquadratiques C sont découpées sur Q_0 par les cônes projetant la cubique K à partir d'un de ses points, et donne les équations de la courbe Γ .

P. Dubreil (Lille).

Godeaux, Lucien: Sur les tangentes de Darboux et de Segre en un point d'une surface. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 1, 5—6 (1932).

On donne une nouvelle et très simple définition des tangentes de Darboux et de Segre en un point P d'une surface, au moyen de deux coniques osculatrices en P aux asymptotiques de la surface qui passent par ce point.

Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur quelques droites associées aux points d'une surface. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 1, 33—36 (1932).

L'A. introduit, pour chaque point P générique d'une surface F , une suite — en générale illimitée — de droites $l_2, l'_2; l_3, l'_3; \dots$, liées à F d'une manière intrinsèque. Ces droites naissent tout naturellement de la considération des deux réseaux qui, sur la V_4^2 des droites de l'espace, représentent les deux systèmes de tangentes asymptotiques de F , et de la suite de Laplace qu'ils déterminent (Bompiani). — Lorsque P décrit F , les droites l_2, l'_2 engendrent deux congruences dont les développables se correspondent; la condition nécessaire et suffisante pour que ces développables correspondent aux asymptotiques de F , est que les quadriques de Lie de cette surface n'aient que deux points caractéristiques: les droites l_2, l'_2 coïncident alors avec les directrices de Wilczynski.

Beniamino Segre (Bologna).

Rozet, O.: Sur les systèmes conjugués de seconde espèce. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18*, 156—164 (1932).

M. B. Segre a introduit et étudié en détail des transformations de Laplace généralisées (Ann. École norm., III. s. 44, 1927), applicables aux systèmes conjugués d'espèce supérieure (de M. Bompiani). Dans cette Note l'A. détermine les cas où un (au moins) des transformés d'un système assigné, conjugué de seconde espèce, se réduit à un réseau conjugué ordinaire ou, en particulier, à une courbe ou à un point; en laissant de côté le cas des grilles (déjà approfondi par M. B. Segre dans un Mémoire des Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 20, 1928), l'A. reconnaît que plusieurs cas peuvent se caractériser en annulant certains invariants relatifs du système conjugué de seconde espèce donné, et il parvient aussi aux conditions géométriques nécessaires et suffisantes afin que ladite particularité se présente.

Beniamino Segre (Bologna).

Rozet, O.: Sur une congruence particulière de droites. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18*, 356—360 (1932).

L'A., en se rattachant à ses recherches antérieures (Sur les systèmes conjugués de seconde espèce. *Bull. Acad. Roy. Belg.*; cf. rapp. précéd.), considère dans S_3 les congruences de droites telles que les coordonnées plueckeriennes des droites de la congruence satisfassent à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre d'un certain type. Pour chaque rayon de la congruence, on a que le transformé de Laplace

d'un des foyers est dans un plan avec l'autre foyer et deux transformés successifs de celui-ci.

Beniamino Segre (Bologna).

Goormaghtigh, R.: Sur les centres de gravité des arcs de courbes gauches. *Mathesis* 46, 206—215 (1932).

Untersuchungen aus Cesàros natürlicher Geometrie (*geometria intrinseca*) werden von ebenen auf räumliche Kurven übertragen. Eine Raumkurve sei mit positiver stetiger Massendichte versehen. O sei ein fester, M ein weiterer Punkt der Kurve. Die Bogenlänge OM sei s . Die mit s multiplizierten Koordinaten des Schwerpunktes des Bogens OM , bezogen auf das (bewegliche) Dreiein Tangente-Binormale-Hauptnormale in M , genügen als Funktionen von s einem linearen Differentialgleichungssystem (ähnlich dem Frenetschen, jedoch inhomogen). Hieraus folgen einige allgemeine Eigenschaften des Ortes der Schwerpunkte der Bögen OM . — Anwendungen auf bemerkenswerte Kurvenklassen bei homogener Massenbelegung. *W. Fenchel*.

Rein, A. O.: Nouvelle preuve de l'identité Poissonienne. *Tôhoku Math. J.* 35, 287—289 (1932).

Rechnerische Verifikation der Jacobischen Identität für die Poissonschen Klammersausdrücke.

W. Fenchel (Göttingen).

Bouligand, Georges: Conditions pour la validité des théorèmes relatifs à la courbure des lignes tracées sur une surface. *J. Math. pure appl.*, IX. s. 11, 131—141 (1932).

Mit seinen direkten Methoden beweist Verf. die Sätze von Meusnier und Euler, wobei über die Fläche nur geometrische Voraussetzungen gemacht werden. (Vgl. die Ankündigung in *C. R. Acad. Sci., Paris*; dies. Zbl. 3, 320.)

Willy Feller (Kiel).

Süss, Wilhelm: Ein Satz von P. Urysohn über mehrdimensionale Eikörper. *Tôhoku Math. J.* 35, 326—328 (1932).

Urysohn hat [*Rec. math. Soc. math. Moscou* 31, 477—486 (1924)] den folgenden (für $n = 3$ von Minkowski herrührenden) Satz bewiesen: Unter allen konvexen Körpern des n -dimensionalen Raumes mit gegebener mittlerer Breite hat die Kugel das größte Volumen. Hierfür wird ein Beweis angegeben, der jedoch überholt ist; denn der Satz ist der Spezialfall $q \equiv 1$ der vom Verf. (vgl. dies. Zbl. 2, 144) bewiesenen Ungleichung $V_{n-1}^n(p, q) \geq V(p) V^n(q)$ zwischen den gemischten Volumina zweier konvexer Körper, und diese Ungleichung ist inzwischen von Bonnesen (vgl. dies. Zbl. 4, 131) als fast unmittelbare Folge des Brunn-Minkowskischen Satzes, der auch hier verwendet wird, erkannt worden. Übrigens läßt sich der vorliegende Beweis kürzen. Die Heranziehung des Blaschkeschen Auswahlssatzes ist überflüssig, da am Schluß der dem Urysohnschen Satz gleichwertige Spezialfall der obigen Ungleichung bewiesen wird.

W. Fenchel (Göttingen).

Süss, Wilhelm: Eindeutigkeitssätze und ein Existenztheorem in der Theorie der Eiflächen im Großen. *Tôhoku Math. J.* 35, 290—293 (1932).

Es wird die folgende relativ-geometrische Verallgemeinerung des Christoffelschen Satzes über die Bestimmung einer Eifläche durch die Summe der Hauptkrümmungsradien als Funktion der Normalenrichtung bewiesen: Es sei eine Eifläche, die Eichfläche, gegeben. K sei ihre Gauss'sche Krümmung. Es sei ferner $f(\xi)$ eine stetige positive Funktion auf der Einheitskugel derart, daß $\int \xi f(\xi) K^{-1/4} d\omega$, erstreckt über die Einheitskugel, verschwindet. Dann gibt es eine bis auf Translationen eindeutig bestimmte Eifläche, bei der die Summe der relativen Hauptkrümmungsradien in bezug auf die Eichfläche gleich $f(\xi)$ ist. — Mit Hilfe der Ableitungsgleichungen der affinen Differentialgeometrie wird der obige Satz auf die Auflösung einer elliptischen Differentialgleichung auf der Kugel zurückgeführt, für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung durch die Ergebnisse von Hilbert (*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Kap. 19, Leipzig u. Berlin 1912) sichergestellt ist. — Ferner wird mit den entwickelten Hilfsmitteln der Minkowskische Eindeutigkeitssatz über die Bestimmung einer Eifläche durch die Gauss'sche Krümmung als Funktion der Normalenrichtung bewiesen.

W. Fenchel (Göttingen).

Nakajima, Soji: Eine Kennzeichnung homothetischer Eiflächen. Tôhoku Math. J. 35, 285—286 (1932).

Besitzen zwei konvexe Körper in jeder Richtung paarweise homothetische Orthogonalprojektionen, so sind sie selbst homothetisch. (Hierbei darf das Ähnlichkeitsverhältnis von der Projektionsrichtung abhängen.) Dieser von W. Süss [Math. Ann. 101, 257 (1929) und in der in dies. Zbl. 3, 410 besprochenen Arbeit] auf wenigen Zeilen durch ganz elementare Betrachtungen bewiesene Satz wird auf einen Satz der relativen Differentialgeometrie zurückgeführt, der als Spezialfall enthält, daß die Kugel die einzige Eifläche konstanter mittlerer Krümmung ist. *W. Fenchel* (Göttingen).

Eiesland, John: The ruled V_{n-1}^n in S_n . II. Tôhoku Math. J. 35, 306—322 (1932).

In einer früheren Arbeit (Rend. Circ. mat. Palermo 54, 335—365) hat Verf. die Gleichung der allgemeinen Regelfläche V_{n-1}^n in S_n hergeleitet. Hier werden die singulären Punkte der Hyperfläche untersucht, insbesondere in den Fällen $n = 6$ und 7. *van der Waerden* (Leipzig).

Vranceanu, G.: Sur les sous-groupes simplement transitifs d'un groupe transitif de mouvement. Bul. Soc. şti. Cluj 6, 429—445 (1932).

Erstens wird das Problem, in einer durch infinitesimale Transformationen gegebenen transitiven Gruppe G_r der Bewegungen eines Riemannschen V_n alle einfach-transitiven Untergruppen zu bestimmen, auf die Behandlung der Lösungen eines Systems von $\frac{1}{2}n(n-1)(r-n)$ quadratischen Gleichungen mit $n(r-n)$ Unbekannten (und konstanten, von der Struktur der gegebenen Gruppe abhängenden Koeffizienten) zurückgeführt. Zweitens wird gezeigt, daß die G_r der Bewegungen eines Riemannschen V_n mit konstanter Krümmung k immer eine einfach-transitive Untergruppe besitzt, und zwar eine reelle im Falle $k < 0$ und eine imaginäre im Falle $k > 0$. Drittens wird der besondere Fall ($r = n + 1$) einer $n + 1$ -gliedrigen transitiven Gruppe G_{n+1} der Bewegungen eines Riemannschen V_n behandelt und einfache hinreichende Bedingungen für die Existenz einer einfach-transitiven Untergruppe der G_{n+1} abgeleitet.

O. Borůvka (Brno).

Barnett, I. A., and David Nathan: Sphere geometry and the conformal group in function space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 400—403 (1932).

Es wird auf eine unmittelbare Erweiterung einiger bekannten Tatsachen der n -dimensionalen Geometrie hingewiesen. Wesentlich handelt es sich um die elementare Kugelgeometrie im Hilbertschen Raume (eine ähnliche Aufgabe betreffend Lies Kugelgeometrie wird vorbehalten). Die der Gruppe der konformen Geometrie entsprechende Gruppe wird eingeführt; ihre infinitesimalen Transformationen stimmen mit den von Kowalewski untersuchten winkeltreuen inf. Transformationen überein.

R. Caccioppoli (Padova).

Rinow, W.: Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen. Math. Z. 35, 512—528 (1932).

Die Arbeit schließt sich an eine frühere, in Gemeinschaft mit H. Hopf durchgeführte Untersuchung des Verf. über abstrakte differentialgeometrische Flächen an [H. Hopf und W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. math. helv. 3, 209—225 (1931); dies. Zbl. 2, 350; wegen der im folgenden benutzten Terminologie muß auf diese Arbeit verwiesen werden]. Die Umgebung eines Punktes A einer differentialgeometrischen Fläche F , zusammen mit der zugehörigen Längenmessung, wird ein Element E mit dem Trägerpunkte A genannt. F heißt eine Fortsetzung von E , und zwar eine vollständige Fortsetzung, falls F vollständig ist. Der Hauptsatz der Arbeit ist dann der folgende Eindeutigkeitsatz: Sind F und F' zwei einfach zusammenhängende vollständige Fortsetzungen desselben Elementes, so sind F und F' isometrisch, d. h. eineindeutig, stetig und längentreu aufeinander abbildbar. Wie leicht ersichtlich, sind der einfache Zusammenhang und die Vollständigkeit wesentliche Voraussetzungen. Die Beweismethode stützt sich auf die Betrachtung der vom Trägerpunkte des fortgesetzten Elementes ausstrahlenden

geodätischen Linien und wird zur Herleitung einer Reihe von weiteren schönen Sätzen über den Einfluß lokaler Eigenschaften auf Eigenschaften im großen verwendet. Zum Schluß wird der Fall von Drehelementen eingehend diskutiert; ein Drehelement ist dabei ein Element mit einer stetigen Schar von isometrischen Abbildungen auf sich selbst, wobei der Trägerpunkt fest bleibt. *Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

Palozzi, G.: *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 543—548 (1932).

Moyennant la considération du voisinage d'un point O d'une surface F , sur les courbes coupées sur F par le plan tangent en O et par les ∞^1 plans qui passent par l'une ou par l'autre des deux tangentes asymptotiques, l'A. obtient d'une façon simple plusieurs éléments géométriques invariants, en partie connus, du voisinage de O sur F .

Beniamino Segre (Bologna).

Dantzig, D. van: *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. I. Einordnung in die Affingeometrie*. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 524—534 (1932).

In Math. Ann. 106, 400—454 hat Verf. die allgemeine Theorie des projektiven Zusammenhangs entwickelt, indem er die Gruppe \mathfrak{S}_{n+1} der allgemeinsten homogenen Transformationen der überzähligen Koordinaten x^0, \dots, x^n der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit $(M_n) H_n$ einführte. Die lokalen (proj.-euklidischen) Räume E_n^* (d. h. ihre kov. und kontrav. Punkte und die in ihnen definierten „Projektoren“) transformieren sich gemäß $A_\nu^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^\nu$. Ein System $\Pi_{\lambda\mu}^\nu$ vom Grade (-1) bestimmt einen proj. Zusammenhang, bei dem es eine kov. Ableitung, wegen

$$d\bar{x}^\nu = \varrho d x^\nu + x^\nu d\varrho \text{ bei } \bar{x} = \varrho x$$

aber im allgemeinen kein kov. Differential gibt. — Verf. stellt sich die Aufgabe, die Theorie des affinen Zusammenhangs in die des proj. einzuordnen. Eine der Gruppe \mathfrak{G}_n der allgemeinen Punkttransf. der M_n unterworfenen, der H_n eindeutig zugeordnete Mannigfaltigkeit X_n erhält man durch Angabe von n unabhängigen Funktionen nullten Grades ξ^k der x^ν . X_n besitzt die lokalen affinen Räume E_n . Jedem kov. Vektor der E_n kann man eineindeutig eine Hyperebene (kov. Punkt) der E_n^* , die mit dem kontrav. Berührungspunkt x^ν inzidiert, zuordnen. Die Einordnung der affinen Theorie in die proj. geschieht nun in völliger Analogie zur gewöhnlichen Geometrie durch Auszeichnung einer (unendlich fernen) Hyperebene t_μ in jeder E_n^* . ($t_\mu x^\mu = 1$.) Auch jedem kontrav. Vektor der E_n kann man dann eineindeutig einen auf der Unendlichfernen liegenden kontrav. Punkt zuordnen. Ferner gelingt es bei einer solchen „proj.-affinen“ H_n , jedem Differential $y^\nu - x^\nu = dx^\nu$ (y^ν ein Nachbarpunkt) eineindeutig ein Vektordifferential $d'x^\nu = \frac{y^\nu}{y^\mu t_\mu} - x^\nu$ zuzuordnen, das bei $\bar{x} = \varrho x$ invariant ist und mit dem gewöhnlichen Linienelement übereinstimmt. Mit Hilfe dieses Differentials kann man dann zu einem System $\Pi_{\lambda\mu}^\nu$ ein kov. Differential angeben. Dadurch ist dann eine affine Übertragung mitbestimmt. Umgekehrt bestimmt ein affiner Zusammenhang eindeutig einen proj., falls noch gewisse Bedingungen erfüllt sind. Zum Schluß werden einige durch den proj. Zusammenhang bestimmte Kurvensysteme erörtert. (Vgl. dies. Zbl. 4, 129.) *G. Howe* (Hamburg).

Dantzig, D. van: *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. II. $X_n + 1$ mit eingliedriger Gruppe*. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 535—542 (1932).

In der zweiten Mitteilung behandelt Verf. das umgekehrte Problem, die Einordnung der proj. Differentialgeometrie in die Affingeometrie mit um 1 erhöhter Dimensionszahl. Dieses Problem ist wohl zum ersten Male von T. Y. Thomas, Math. Z. 25, 723, behandelt worden. Ebenso wie die Geraden durch einen festen Punkt eines affinen E_{n+1} die Punkte eines proj. E_n^* bilden, so gewinnt man die proj. Differentialgeometrie, indem man die Bahnkurven einer beliebigen eingliedrigen Gruppe in einer Affingeometrie mit um 1 erhöhter Dimensionszahl als Elemente eines neuen Raumes auffaßt. — Man betrachtet die homogenen Koordinaten x^ν der H_n als Koordinaten

einer X_{n+1} mit der Gruppe \mathfrak{G}_{n+1} . Bei der Untergruppe \mathfrak{S}_{n+1} haben die Geraden durch den Ursprung invariante Bedeutung. Transformiert man die x^v mit \mathfrak{G}_{n+1} in allgemeine E^N , so werden vermöge $\frac{\partial}{\partial x^v} E^N = A_v^N$ die Projektoren der H_n als Affinoren der X_{n+1} mittransformiert. Der Berührungsort x^v (als Punkt der E_v^* , nicht der H_n aufgefaßt) geht über in $x^N = A_v^N x^v$. Dieses Vektorfeld liefert die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe. Projektoren vom „Exzeß“ 0, z. B. $x^v, II_{\lambda\mu}^v$, sind bei dieser Gruppe invariant, d. h. ihre „Liesche Ableitung“ verschwindet. Umgekehrt kann man in einer X_{n+1} mit gegebenem Vektorfeld x^N Koordinaten so auszeichnen, daß sie als homogene Koordinaten einer H_n betrachtet werden können. — Mit Hilfe dieser Theorie klärt Verf. den Zusammenhang zwischen den 5-dimensionalen (Kaluza-Klein) und den 4-dimensionalen proj. Relativitätstheorien (Veblen u. Hoffmann, Einstein-Mayer).

G. Howe (Hamburg).

Ehresmann: Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2004—2006 (1932).

Die projektive unitäre Gruppe der Variablen x_1, \dots, x_{n+1} transformiert die Geraden des projektiven Raumes $[n]$ nach einer transitiven Gruppe G . Die Integralinvarianten dieser Gruppe werden nach E. Cartan bestimmt: sie sind den irreduziblen Bestandteilen einer gewissen Darstellung von G eindeutig zugeordnet.

van der Waerden (Leipzig).

Zariski, Osear: On the topology of algebroid singularities. Amer. J. Math. 54, 453—465 (1932).

K. Brauner hat angegeben, wie man jedem Zweig einer algebroiden Kurve $f(x, y) = 0$ einen gewöhnlichen Knoten zuordnen kann, indem man den Durchschnitt des Zweiges mit dem Rand einer kleinen Umgebung $|x|^2 + |y|^2 < \varepsilon$ stereographisch in den gewöhnlichen Raum projiziert. Der Verf. gibt eine neue Methode an, die definierenden Relationen der Knotengruppe direkt aus der Puiseux-Entwicklung des Zweiges zu berechnen, und er beweist, daß zu geometrisch verschiedenen Singularitäten (d. h. zu solchen mit verschiedenen charakteristischen Zahlen im Sinne M. Noethers) auch nicht-isomorphe Knotengruppen gehören.

van der Waerden (Leipzig).

Topologie :

Bergmann, Gustav: Zur algebraisch-axiomatischen Begründung der Topologie. Math. Z. 35, 502—511 (1932).

Der Verf. zeigt wie die kombinatorischen Dualitätssätze der Topologie sich in der von Mayer angefangenen axiomatischen Behandlung einordnen lassen. Insbesondere behandelt er in dieser Weise die Homologiezahlen des Randes einer Mannigfaltigkeit.

van Kampen (Baltimore).

● **Reidemeister, Kurt: Einführung in die kombinatorische Topologie.** (Die Wiss. Hrsg. v. Wilhelm Westphal. Bd. 86.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1932. XII, 209 S. RM. 17.20.

Das Buch könnte mit mindestens gleichem Recht als eine Einführung in die Theorie der abstrakten diskreten Gruppen in ihrer Darstellung durch Erzeugende und definierende Relationen bezeichnet werden. Das ist in der Natur der Sache tief begründet. Man weiß seit langem, daß die Gruppentheorie ein entscheidendes Hilfsmittel der Topologie ist. Dehn hat zu wiederholten Malen den umgekehrten Gesichtspunkt hervorgehoben, daß die Objekte der Topologie einen Darstellungsbereich für abstrakt gegebene Gruppen liefern. Das ist der leitende Gedanke des Buches von Reidemeister, wenn auch der Verf. nach meiner Ansicht die dadurch ermöglichte Anwendung der geometrischen Anschauung in der abstrakten Gruppentheorie nicht genügend ausnutzt; sie wäre sonst gerade durch die Beschränkung auf zwei Dimensionen nahegelegt. In der in den letzten Jahren soviel bearbeiteten n -dimensionalen Topologie ist die Beschränkung auf die Homologiegruppe stark vorherrschend. Das ist natürlich, weil es der am leichtesten zugängliche Teil des schwierigen Gegenstandes ist. Das Buch von R. zeigt dem Leser, daß die Topologie mehr leistet, als einen Darstellungsbereich für die lineare Algebra abzugeben. — Die erste Hälfte des Buches (Kap. 1—3) bildet eine

hier wohl zum ersten Male in dieser Vollständigkeit gegebene Behandlung der durch Erzeugende und definierende Relationen dargestellten Gruppen. Der Verf. selbst sowie Schreier und Hurewicz haben durch die gleichartige Darstellung der Untergruppen so gegebener Gruppen wesentlich zu dieser Theorie beigetragen. Auch der „Freiheitssatz“ von Dehn und Magnus ist dem Zusammenhang auf natürliche Weise eingeordnet. Unter den (leider nur spärlich gesäten) Beispielen werden Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe behandelt. Erfreulicherweise ist der gruppentheoretische Teil nicht auf das für den topologischen Teil streng Notwendige beschränkt worden. — In den Kap. 4—6 werden nun Strecken- und Flächenkomplexe axiomatisch aufgebaut und als Darstellungen von Gruppen gedeutet. Hauptpunkte der Behandlung sind u. a. Bäume, Wegegruppen (Fundamentalgruppen), Mannigfaltigkeiten, Übergang zur dualen Mannigfaltigkeit, Elementarverwandtschaft und, als ein Hauptresultat, die rein kombinatorische Ableitung der kanonischen Normalformen von Mannigfaltigkeiten. Dann insbesondere die Überlagerung von Strecken- und Flächenkomplexen und ihr Zusammenhang mit Untergruppen der Wegegruppe. Das Dehnsche Gruppenbild einer Gruppe mit n Erzeugenden entsteht auf natürliche Weise als Überlagerungskomplex eines Komplexes mit einem Punkt und n singulären Strecken und wird zu Restklassengruppenbildern erweitert. Für reguläre Überlagerungen wird die Gruppe der Transformationen in sich erklärt. Es wäre ratsam gewesen, ausdrücklich hervorzuheben, daß sie zwar mit der „Permutationsgruppe“ isomorph ist, aber im allgemeinen die Fundamentalbereiche anders permutiert. Diese Abschnitte würden dem Leser leichter fallen, wenn das anschauliche Moment nicht so restlos verbannt wäre. Der Begriff der logischen Zuordnung ist natürlich für den axiomatischen Aufbau zu bevorzugen, er verträgt sich aber damit, daß man die Phantasie des Lesers durch eine Figur unterstützt, von denen das Buch keine einzige enthält! So z. B. bei der Erklärung der dualen Mannigfaltigkeit. Die geometrische Intuition bleibt doch die ergiebigste Quelle der topologischen Forschung, sicherlich auch bei dem Verf., und das Buch ist als „Einführung“ in die Topologie bezeichnet. Als Gegenstück vergleiche man die Abhandlung von Ingebrigt Johansson (dies. Zbl. 1, 294), die in Inhalt und Methode vieles gemeinsam hat. — Das 7. Kapitel behandelt die verzweigten Überlagerungen und die damit zusammenhängenden Gruppen. Hier kommt die Bestimmung der Struktur von Untergruppen zu vollem Nutzen. Eine deutlichere Herausarbeitung der Riemannschen Flächen erschien vielleicht mit der Forderung des rein kombinatorischen Aufbaues nicht vereinbar. Dies ganze Kapitel hängt in der Theorie der topologischen Flächenabbildungen aufs engste zusammen mit der Bestimmung der Abbildungsklassen endlicher Ordnung und der zugehörigen positiven Fixpunktklassen, indem es auch dabei auf die als „Hauptgruppe“ bezeichnete Gruppe und die Bestimmung ihrer Elemente endlicher Ordnung ankommt. Hier wird zum Schluß die Dehnsche Lösung des Identitätsproblems für Flächenfundamentalgruppen (Wortproblem) verallgemeinert.

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

Newman, M. H. A.: On the products $C_h C_k$ and $C_h \times C_k$ in topology. J. London Math. Soc. 7, 143—147 (1932).

The author shows how the intersectiontheory on a product can be derived from a corresponding intersectiontheory on a join.

van Kampen (Baltimore).

Gehman, Harry Merrill: Concerning sequences of homeomorphisms. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 460—465 (1932).

Es werden hinreichende Bedingungen für Homöomorphie der Durchschnittsmengen M und N zweier Folgen $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ und $N_1 \supset N_2 \supset \dots$ aufgestellt, unter Annahme, daß für jedes i die Punktfolgen M_i und N_i zueinander homöomorph sind. Die beiden Folgen werden nach Verf. zueinander gleichmäßig homöomorph genannt, falls die Folge der entsprechenden Abbildungen $N_i = f_i(M_i)$ folgende Eigenschaft aufweist: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, derart, daß für fast alle i die Abbildung f_i je zwei voneinander um $< \delta$ entfernte Punkte von M_i in voneinander um $< \varepsilon$ entfernte Punkte von N_i überführt und, vice versa, falls dasselbe von der Abbildung $f_i^{-1}(N_i)$ gilt. Sind die Folgen $\{M_i\}$ und $\{N_i\}$ gleichmäßig homöomorph, sind ferner für jeden Punkt p von M bzw. q von N , die Folgen von Bildpunkten $\{f_i(p)\}$ bzw. $\{f_i^{-1}(q)\}$ konvergent und ihre Limites in N bzw. in M enthalten, so sind M und N homöomorph, und zwar ist die Homöomorphie durch die Abbildung $f(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(p)$

gegeben. Bei kompakten M_i und N_i läßt sich die Voraussetzung über Konvergenz von $\{f_i^{-1}(q)\}$ durch eine schwächere ersetzen. Wird bloß eineindeutige und (nicht umkehrbar) stetige Abbildbarkeit von M auf N verlangt, so braucht die oben definierte gleichmäßige Beziehung zwischen den Folgen $\{M_i\}$ und $\{N_i\}$ auch nur in

der einen Richtung zu bestehen. Die Sätze gelten in allgemeinen metrischen Räumen.
B. Knaster (Warschau).

Haratomi, Keitaro: Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit. I. Jap. J. Math. 8, 113—141 (1931).

Es sei E ein metrischer Raum; der Punkt x von E heißt dann ein \aleph_α -Punkt der Teilmenge A von E , wenn für jede Umgebung U_x von x die Mächtigkeit des Durchschnitts von A und U_x mindestens \aleph_α ist. E heißt \aleph_α -separabel, wenn es eine Menge F in E gibt, so daß jeder Punkt aus E in F liegt oder \aleph_α -Punkt von F ist, und \aleph_α die Mächtigkeit von F ist. Hat dann E die Mächtigkeit \aleph_ε und ist \aleph_α -separabel, so ist E auch \aleph_ε -separabel, wenn nur $\alpha \leq \xi \leq \varepsilon$ ist. Man versteht unter dem Grad γ von E die kleinste Ordinalzahl derart, daß E \aleph_γ -separabel ist. Dann ist der Grad einer Teilmenge von E höchstens gleich dem Grad von E selbst. Versteht man weiter unter einer Netzmenge N die Vereinigung von Mengen $E(n)$ derart, daß $E(0) = 0$, $E(n-1)$ Teilmenge von $E(n)$ ist, jeder Punkt aus E von $E(n)$ einen kleineren Abstand als $1/n$ hat, während zwei verschiedene Punkte aus $E(n)$ mindestens den Abstand $1/n$ haben, so gilt: ist γ der Grad von E , so ist \aleph_γ die Mächtigkeit einer jeden Netzmenge von E . — E heißt \aleph_α -kompakt bzw. \aleph_α -superkompakt, wenn die Mächtigkeit von E mindestens \aleph_α ist und jede Teilmenge A von E , deren Mächtigkeit mindestens \aleph_α ist, in E bzw. sogar in A wenigstens einen \aleph_α -Punkt besitzt. Folgende drei Aussagen sind dann äquivalent: 1. E ist \aleph_α -separabel und hat wenigstens die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$. 2. E ist $\aleph_{\alpha+1}$ -kompakt. 3. E ist $\aleph_{\alpha+1}$ -superkompakt. Ist λ eine Limeszahl und E \aleph_λ -kompakt, so ist E auch \aleph_λ -separabel. Die Umkehrung gilt nicht. — Verstehen wir unter dem Kompaktheitsgrad von E die kleinste Ordinalzahl κ derart, daß E \aleph_κ -kompakt ist, so gibt es dann und nur dann Räume vom Kompaktheitsgrade λ [λ Limeszahl], wenn $\lambda = 0$ oder ein ω -Limes ist. Ist E \aleph_λ -kompakt, λ eine Limeszahl, aber kein ω -Limes, so ist E auch \aleph_λ -superkompakt, während es keinen \aleph_λ -superkompakten Raum gibt, falls $\lambda = 0$ oder ein ω -Limes ist. In diesem letzten Falle ist E dann und nur dann \aleph_λ -kompakt, wenn jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen, deren Mächtigkeit je mindestens \aleph_λ ist, einen nicht leeren Durchschnitt hat. Schließlich ist E dann und nur dann $\aleph_{\alpha+1}$ -kompakt, wenn E mindestens die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$ hat und jedes E überdeckende System offener Mengen ein ebenfalls E überdeckendes Teilsystem besitzt, dessen Mächtigkeit höchstens \aleph_α ist.
Reinhold Baer (Halle a. S.).

Roberts, J. H.: Concerning unordered spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 403—406 (1932).

Es sei S ein metrischer (separabler) Raum. In S sei ein System σ von Teilmengen gegeben derart, daß die Summe je zweier relativ-abgeschlossener Mengen aus σ und jede (abgeschlossene) Teilmenge einer Menge aus σ wieder zu σ gehört (z. B. sei σ das System aller höchstens n -dimensionalen, aller höchstens abzählbaren, aller endlichen Mengen). In der Dimensions- und Kurventheorie von Menger und Urysohn ist die Betrachtung der Mengen $M \subset S$, deren Punkte in Umgebungen mit beliebig kleinen Durchmessern liegen, deren Begrenzungen mit M zu σ gehörige Durchschnitte haben, von fundamentaler Bedeutung. G. T. Whyburn gelangt bei gewissen Problemen der Kurventheorie zu allgemeineren Resultaten, indem er Mengen $M' \subset S$ betrachtet, deren Punkte in einer monoton fallenden Folge von Umgebungen U_i liegen, für welche die Begrenzungen B_i mit M' zu σ gehörige Durchschnitte haben und p der Durchschnitt der Mengen $U_i + B_i = \bar{U}_i$ ist. Verf. zeigt nun, daß, falls der Raum S eine solche Menge M' ist und das System σ nur kompakte Mengen enthält, der Raum S eineindeutig und stetig (aber nicht immer auch umkehrbar stetig, also topologisch) abgebildet werden kann auf einen metrischen Raum S' , in welchem jeder Punkt in Umgebungen mit beliebig kleinen Durchmessern und zum Bildsystem σ' gehörigen Begrenzungen liegt.
Nöbeling (Wien).

Mechanik.

Wolkowitsch, D.: Sur le problème du solide mobile autour d'un point fixe. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 24—25 (1932).

Immler, W.: Die Schwingungsform stark gedämpfter Systeme. Ann. Hydrogr. 60, 246—252 (1932).

Im ersten Teile werden die stark gedämpften, aber noch periodischen Schwingungen besprochen. Es wird gezeigt, wie man durch Auswahl einiger günstiger Punkte der Schwingungskurve die Konstanten des schwingenden Systems bestimmen kann. Viel genauer würde allerdings die Konstantenbestimmung, wenn man sich der Methode der kleinsten Quadrate bedienen würde. Bei den Beispielen sind Schwingungen von Amplituden bis 90° gegeben. Hier kann aber Rechnung und Beobachtung nie mehr stimmen, wenn man nicht die elliptischen Korrekturen berücksichtigt. Dies zeigen auch die Meßergebnisse. Der zweite Teil knüpft an einen früheren Aufsatz des Verf. in derselben Ztschr. 59, 277 (1931) an. In diesem wurde der Kursfehler des Kompasses durch die magnetische Inklination beim Drehen des Flugzeuges berechnet. Der Verf. stellt nun die Bedingung auf, daß die Schwingungsgeschwindigkeit des Kompasses nicht größer werden darf als die Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges, damit keine Fehldrehung vorgetäuscht wird. Ich glaube nicht, daß die gegebene singuläre Lösung das Problem in seiner Vollständigkeit erfaßt. Man sieht dies daraus, daß die aufgeführten Gleichungen keine Resonanzerscheinungen geben, die in Wirklichkeit aber vorhanden sein müssen. *M. Schuler.*

Paulus, F.: Die Beschleunigung bei der umgekehrten und relativen Bewegung. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 41, 269—300 (1932).

Es wird außer neuen Betrachtungen über den ebenen Beschleunigungszustand die Coriolisbeschleunigung aus der Umkehr der Bewegung hergeleitet und gleichzeitig das Verhalten der Beschleunigung bei der Umkehr der Bewegung klargestellt, worauf bisher kaum oder irrtümlich hingewiesen wurde. Weiter wird entsprechend dem Satz über die Lage der Momentanzentren bei drei gegeneinander bewegten Ebenen die Lage der Zentren der Winkelbeschleunigung betrachtet und für verschiedene mögliche Fälle die Konstruktion dieses Zentrums für die resultierende Bewegung angegeben.

W. Meyer zur Capellen (Koblenz/Mosel).

Wintner, Aurel: Neuere Untersuchungen über das Dreikörperproblem. Naturwiss. 1931, 1010—1017.

Zusammenfassung einer Reihe von neueren mathematischen Forschungen unter dem Gesichtspunkte „ n -Körperproblem“ und Hervorhebung der Bedeutung der neuen Vorstellungen, die durch das numerische Material der Kopenhagener Sternwarte zustande gebracht ist. Durch die Energie von E. Strömgren sind ja auf diesem Gebiete die vom Referent in den 90er Jahren gehegten Zukunftshoffnungen (siehe Darwin — Ref. in Vjschr. Astron. Ges. 1897) weit übertroffen worden, und die neuen Vorstellungen haben schon die Richtlinien der mathematischen Forschung in neue aussichtsreiche Bahnen gelenkt.

Burrau (Kopenhagen).

Störmer, Carl: Ein Fundamentalproblem der Bewegung einer elektrisch geladenen Korpuskel im kosmischen Raume. III. Z. Astrophys. 4, 290—318 (1932).

In der zweiten Mitteilung des Verf. (vgl. dies. Zbl. 2, 415) sind die ins räumlich Unendliche verlaufenden Lösungen der zugrunde gelegten Differentialgleichungen nach Potenzen der reziproken Bogenlänge entwickelt worden, was aber bei numerischer Durchführung sich als unzweckmäßig erweist. Im Anschluß an die erste Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 2, 58) wird jetzt deshalb in die Bewegungsgleichungen mittels einer geschickt gewählten, durch eine Differentialgleichung zu definierenden Transformation eine neue unabhängige Variable eingeführt, bei welcher die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten sich bequemer gestaltet. Die dabei praktisch in Betracht kommenden Terme werden auch explizit berechnet. — Es wird sodann die Aufgabe von einer anderen Seite, nämlich dadurch in Angriff genommen, daß die exakten Bewegungsgleichungen durch gewisse, nur angenähert gültige ersetzt werden, was unter Benutzung elliptischer Funktionen eine weitgehende Diskussion der Bewegung gestattet. — Zum Schluß werden die hergeleiteten Formeln an Hand der

Grenzfälle verifiziert, bei welchen entweder überhaupt kein, oder nur ein Coulombsches, oder endlich nur ein Dipolfeld vorhanden ist. *Wintner* (Baltimore).

Belorizky, D.: Sur la nature des choes dans le problème des trois corps à trois degrés de liberté. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 769—771 (1932).

Indem Verf. seine Formeln auf Meteoriten und Kometen, die mit einem Planeten zusammenstoßen, anzuwenden beabsichtigt, untersucht er den Fall des Dreikörperproblems, wo eine Masse = 0 ist, die zwei anderen Massen m_0 und m ($m_0 + m = 1$) sich zirkular bewegen. Die Koordinatenachsen werden rotierend gewählt, so daß diese zirkulare Bewegung (der Winkelgeschwindigkeit = 1, was man durch Wahl der Gravitationskonstanten erreichen kann) aufgehoben wird. Die Gleichungen dieser relativen Bewegung der Masse 0 werden dann „regularisiert“ durch dieselbe Transformation, die schon mehrmals (Thiele 1894, Burrau 1906, Levi-Civita 1920) angewandt worden ist. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems wird in die Masse m verlegt, und die ersten Glieder der Entwicklung der Koordinaten der Masse 0 im Falle des Zusammenstoßes mit m bzw. Ejektion aus m heraus werden aufgestellt. Als Resultat wird angegeben, daß, wenn u^4 vernachlässigt werden kann (u ist die transformierte Zeit: $dt/r = du$), die Bewegung eine ebene Kurve 6. Grades ist. *Burrau* (Kopenhagen).

Matukuma, Takehiko: Periodic orbits in Hill's case. II. (Retrograde variational orbits.) Proc. Imp. Acad. Jap. **8**, 147—150 (1932).

Der hier behandelte Spezialfall des Dreikörperproblems ist ein Satellitenproblem: Parallaxe und Exzentrizität der Sonne sowie die Neigung der Satellitenbahn gegen die Planetenbahn werden vernachlässigt. Es werden die retrograden periodischen Bahnen des Satelliten untersucht. Ausgehend von der Lösung der Bewegungsgleichungen für den Grenzfall unendlich großer Bahndimensionen, wird eine Methode zur Darstellung der Lagekoordinaten durch Fourierreihen entwickelt. Als Winkelvariable wird die synodische mittlere Anomalie, als Entwicklungsparameter das Verhältnis der mittleren Bewegung des Satelliten zu der des Planeten benützt. Die charakteristischen numerischen Größen werden für eine Anzahl Bahnen zusammengestellt. *A. Klose* (Berlin).

Mendes, M.: Application de la méthode de la variation des constantes au problème des n corps à masses variables. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1794—1796 (1932).

Der Verf. deutet das zu zeitabhängigen Massen gehörige n -Körperproblem als ein Störungsproblem, wobei als ungestörte Bewegung eine als bekannt vorausgesetzte Lösung des zu konstanten Massen gehörigen n -Körperproblems betrachtet wird, und schreibt die zugehörigen Lagrangeschen Störungsformeln hin. *Wintner* (Baltimore).

Viola, Tullio: Sui diagrammi reciproci del Cremona. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10**, 167—172 (1932).

Der Verf. beweist, daß sich zu jeder aus einem Gleichgewichtssystem von Kräften bestehenden Belastung eines einfachen Dreieckfachwerks ein Cremonascher Kräfteplan zeichnen läßt, und gibt ein nicht einfaches Dreieckfachwerk an, für welches nur bei gewissen Ausnahmebelastungen ein Cremonascher Kräfteplan konstruiert werden kann. *Prager* (Göttingen).

Hydro- und Aeromechanik:

Levi-Civita, Tullio: Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. **1**, 1—33 u. 229—250 (1932).

An asymptotic expression $\nu_0 \log(l/\varepsilon)$ is first obtained for the Newtonian potential U of a rectilinear segment of length 1 and constant density ν_0 for a point M at a small distance ε from one end and not in line with the segment. This expression is then extended to the case of a curve C and asymptotic expressions are obtained for the potential of a thin tube and for the autopotential. A simple expression for the latter is obtained as a line integral of $k\nu^2$, where k is a configuration parameter depending only upon the form of the normal section of the tube. This parameter occurs also in

the asymptotic expressions for the resultant attraction Φ and the mean gradient $\mathbf{g}^{(a)}$, in fact

$$\Phi = \frac{d}{ds}(\nu^2 k \mathbf{t}), \quad \mathbf{g}^{(a)} = \frac{1}{\nu} \frac{d}{ds}(\nu^2 k \mathbf{t}),$$

where \mathbf{t} is the versor of the tangent to C at P . — In his study of a vortex filament the author obtains an asymptotic expression

$$\mathbf{v}_p = \sigma k c \mathbf{b}$$

for the velocity \mathbf{v}_p induced in the filament itself at a point P ; here $2\pi\sigma$ is the intensity of the vortex filament, $c(s)$ is the curvature and $\mathbf{b}(s)$ the binormal versor of the directrix of the filament. — After some kinematical considerations relating to the migration of a filament and the inextensibility of its directrix, the author uses the method of moving axes to obtain the intrinsic equations of motion (primes denote differentiations with respect to s)

$$\begin{aligned} \frac{dc}{ds_1} &= (kc\gamma)' + (kc)\gamma', \\ \frac{d\gamma}{ds_1} &= \left\{ k\gamma^2 - \frac{1}{c} (kc)'' \right\} - c(kc)' \end{aligned}$$

where s_1 is related to the time t by the equation $s_1 = \sigma t$ and γ is the second curvature (torsion) of the directrix. A study is made of a filament with rigid directrix and of the small oscillations about the rigid form.

H. Bateman (Pasadena).

Lampariello, G.: Sull'instabilità dei vortici elicoidali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 432–436 (1932).

The curvatures c, γ of a filament are functions of the arc s and of a variable t proportional to the time. To satisfy Levi-Civita's differential equations (see preced. abstr.)

$$\dot{c} = (c\gamma)' + c'\gamma, \quad \dot{\gamma} = (\gamma^2 - c''/c)' - c c'$$

in which primes denote differentiations with respect to s , dots differentiations with respect to t , the author writes $c(s, t) = c_0 + e(s, t)$, $\gamma(s, t) = \gamma_0 + h(s, t)$, then

$$\ddot{e} - 4\gamma_0 \dot{e}' + (1 + 4\gamma_0^2) e'' + e^{\text{IV}} = 0,$$

There is a solution of type

$$e(s, t) = \sum_{r=1}^n c_r e^{m_r t} f_r(t)$$

where the number n and the constants c_r are chosen so that $e, \dot{e}, \dot{e}', \ddot{e}', \ddot{e}'', e', e'',$ and e''' are zero when $t = 0$ and s has an end value α or β .

H. Bateman (Pasadena).

Kobayashi, Iwao: Nichtstationäre geradlinige Translationsbewegungen einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 21, 88–95 (1932).

Assuming that the fluid is incompressible and that the quadratic terms in the equations of motion can be neglected, the author finds the motion of a sphere of radius a in a viscous fluid when an elastic force acts on the sphere. The displacement S of the center of the sphere at time t is then connected with the initial displacement S_0 by the relation

$$S = S_0 \left[1 + 4 \frac{f^2}{R} e^{-\eta t} \text{Cos}(\xi t - \theta) - \frac{2f^2}{\pi b c} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2 t} dx}{(x^4 - b^2 x^2 + f^2)^2 + b^2 c^2 x^2} \right],$$

where $R \text{Cos} \theta = \xi^2 - \eta^2 + 2f^2 - 2b^2 \eta$, $R \text{Sin} \theta = 2\xi(\eta + b)$, $c^2(2M + m) = qm$, $ab = c\sqrt{\nu}$, $f^2(2M + m) = 2\lambda(M - m)$, $4\xi = 4f - bc\sqrt{2f}$, $4\eta = bc\sqrt{2f} - b^2(c^2 - 2)$. M is the mass of the sphere, m that of the fluid displaced, λ an elastic constant, ν the kinematic viscosity, which is supposed to be small. An expression involving a definite integral is obtained also for the rate of fall of a sphere under gravity and is compared with previous expressions obtained by Boggio and Bromwich by entirely different methods.

H. Bateman (Pasadena).

Gruschwitz, E.: Über den Ablösungsvorgang in der turbulenten Reibungsschicht. Z. Flugtechn. Motorluftsch. **23**, 308—312 (1932).

Es werden unter Hinzunahme weiterer empirischer Daten über die Strömung in Grenzschichten einige physikalische Folgerungen aus dem Ansatz der früheren Arbeit des Verf. [Ing.-Arch. **2**, 321 (1931); ds. Zbl. **2**, 295] gezogen. *F. Noether* (Breslau).

Demtchenko, Basile: Variation de la résistance aux faibles vitesses sous l'influence de la compressibilité. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1720—1723 (1932).

L'auteur donne un résumé des formules qui découlent de sa théorie du mouvement permanent lent bidimensionnel d'un fluide compressible [C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1218 (1932); ce Zbl. **4**, 172] et qui expriment la correspondance entre les quantités hydrodynamiques du problème donné (fluide compressible) et du problème transformé (fluide incompressible). Les formules qui donnent la relation entre les résistances par unité de l'arc sont appliquées ensuite à deux problèmes particuliers de mouvement avec formation de surfaces de glissement. *V. Fock* (Leningrad).

Rossignol, J.: Problème touchant des tourbillons cylindriques de section finie. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 2026—2028 (1932).

In einer früheren Arbeit des Verf. [C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 700—703 (1931); dies. Zbl. **3**, 83], bei der es sich ebenfalls um das Problem zylindrischer Wirbel von endlichem Querschnitt handelte, ergaben sich als Lösungen Integralgleichungen folgender Gestalt:

$$k_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_1' H(\theta_1' \theta_1) d\theta_1' = F_1(k_1, \theta_1, k_2),$$

$$k_2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_2' H(\theta_2' \theta_2) d\theta_2' = F_2(k_2, \theta_2, k_1),$$

die durch sukzessive Approximation nunmehr gelöst werden. Setzt man hierin in der freien Funktion $k_1 = k_2 = 0$, so erhält man in erster Näherung:

$$k_1^{(1)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_1' H(\theta_1' \theta_1) d\theta_1' = F_1(0, \theta_1, 0),$$

$$k_2^{(1)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_2' H(\theta_2' \theta_2) d\theta_2' = F_2(0, \theta_2, 0),$$

deren Lösungen ohne weiteres angegeben werden können. Weiterhin ersetzt man in F_1 und F_2 die Funktionen k_1 und k_2 durch $k_1^{(1)}$ und $k_2^{(1)}$, wodurch wieder zwei Integralgleichungen für $k_1^{(2)}$ und $k_2^{(2)}$ erhalten werden. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, und es wird gezeigt, daß die Reihen der so gewonnenen Funktionen $k_1^{(n)}$ und $k_2^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ zwei Funktionen k_1 und k_2 festlegen, die als Lösungen des ursprünglichen Systems anzusehen sind. *A. Kneschke* (Dresden).

Morton, W. B.: On the motion near two straight parallel vortices. Proc. Roy. Irish Acad. A, **41**, 1—7 (1932).

Es werden die Stromlinienbilder für Paare von geraden Wirbelfäden angegeben für verschiedene Intensitätsverhältnisse k_1/k_2 der beiden Wirbel, und zwar für $k_1/k_2 = -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1$. Insbesondere wird nach denjenigen Punkten gefragt, die sich so bewegen, als ob sie mit den beiden Wirbelzentren starr verbunden sind, wo also in bezug auf ein mit den Wirbelzentren fest verbundenes Koordinatensystem die Flüssigkeit in Ruhe bleibt. Wenn $k_1/k_2 > 0$, gibt es fünf, und wenn $k_1/k_2 < 0$, so gibt es drei solche Punkte. Zwei von ihnen liegen immer auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungsgeraden der Wirbelzentren und der dritte bzw. die drei übrigen auf der Verbindungsgeraden der beiden Wirbelzentren. *H. Schlichting* (Göttingen).

● **Hatschek, Émile: La viscosité des liquides. Traduit de l'anglais par Georges Arçay. Préface de Marcel Brillouin. Paris: Dunod 1932. XVI, 238 S. u. 88 Fig. Frs. 66.—**

Es wird über die Zähigkeit von Flüssigkeiten das am meisten gebrauchte Material zusammengestellt, das man bisher nur aus Handbüchern und Originalarbeiten entnehmen konnte. Das Hauptgewicht wird auf die experimentellen Ergebnisse gelegt. Die mathematischen Entwicklungen werden nur so weit durchgeführt, wie sie für das Verständnis der Experimente unbedingt erforderlich sind. — Aus dem reichen Versuchsmaterial mögen hier nur wenige besonders bemerkenswerte Ergebnisse erwähnt werden. Der Zusammenhang der reziproken Zähigkeit $1/\eta$ (= Fluidität) mit dem spezifischen Volumen v läßt sich für sehr viele Flüssigkeiten durch das einfache Gesetz $\frac{1}{\eta} = \frac{v - \omega}{c}$ ausdrücken (ω, c = Konstanten). Für den Zusammenhang zwischen Molekulargewicht M und Zähigkeit gilt für viele Flüssigkeiten die einfache Formel: $\log \eta = aM + b$ (a, b = Konstanten). Für die Zähigkeit eines Flüssigkeitsgemisches gilt nur in ganz seltenen Fällen das additive Gesetz. Meist weisen die Kurven Zähigkeit als Funktion des Mischungsverhältnisses ein ausgeprägtes Extremum auf. Bei gewissen chemischen Verbindungen zeigen diese Kurven ganz ausgeprägte Singularitäten, derart, daß für einen ganz schmalen Bereich des Mischungsverhältnisses die Zähigkeit mehrere hundertmal so groß ist als die Zähigkeit der Komponenten.

H. Schlichting (Göttingen).

Rosenblatt, A.: Sur les mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles.

IV. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 553—558 (1932).

In 3 vorangehenden Noten (dies. Zbl. 2, 421 u. 3, 176) hatte der Verf. Störungen einer ruhenden Flüssigkeit in einem Kanal untersucht, der an einem Ende durch eine Wand abgeschlossen gedacht war, und zwar durch Reihenentwicklungen nach einem Parameter, der der Reynoldsschen Zahl entspricht. In der vorliegenden Note werden die bei diesen Störungen auftretenden Druckkräfte und Spannungen an der Wand gleichfalls in solche (in einem gewissen Bereich konvergente) Reihen entwickelt, mit dem Ziele, zu fragen, ob solche Störungen auch in dem beiderseits unendlichen Kanal möglich wären. Die letztere Frage ist aber vorläufig nicht in Angriff genommen; es wäre auch eine physikalische Deutung der untersuchten Strömungsformen zu wünschen.

F. Noether (Breslau).

Reiner, Markus: Die Berechnung des Einflusses einer festen Wand auf den Aggregatzustand einer Flüssigkeit aus Viskositätsmessungen. Physik. Z. 33, 499—502 (1932).

Bei Flüssigkeiten treten in den Grenzschichten gegen andere Flüssigkeiten oder gegen feste Wände Änderungen der Zähigkeit ein, die auf eine Orientierung der Moleküle zurückzuführen sind. Der Verf. gibt die folgende neue Methode an, um aus Zähigkeitsmessungen mit Kapillaren von verschiedenen Durchmessern festzustellen, ob die Kapillarwand die Zähigkeit der Flüssigkeit in der Grenzschicht verändert: Man führt Viskositätsmessungen bei verschiedenen Drucken p mit mehreren Kapillaren (Radius = R) aus, und trägt die wie gewöhnlich berechnete „fiktive“ Fluidität $\varphi' = Q/t: \frac{\pi R^4 p}{8l}$ gegen die Wandspannung $\tau_w = \frac{p \cdot R}{2l}$ auf (Q/t = Durchflußmenge pro Sekunde, l = Länge der Kapillare, Fluidität = reziproke Zähigkeit). Liegen alle Punkte auf ein und derselben Kurve, so ist keine Zähigkeitsänderung in der Grenzschicht vorhanden. Ist diese Kurve eine zur τ_w -Achse parallele Gerade, so ist die Flüssigkeit eine Newtonsche; ist diese Kurve keine Gerade, so liegt eine nicht-Newtonsche Flüssigkeit vor. Ergeben sich für verschiedene R -Werte verschiedene Kurven, so ist eine Grenzschicht mit veränderter Zähigkeit vorhanden, deren Dicke ε und Fluidität Φ mit der Fluidität φ der Flüssigkeit in der Beziehung steht $\varphi' = \Phi - (\Phi - \varphi) \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^4$. Dieses Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn die Schichtdicke nicht allzu klein ist im Vergleich zum Kapillarendurchmesser.

H. Schlichting (Göttingen).

Mercier, Pierre-Ernest: *Formes intrinsèques des lois du mouvement plan (mouvement permanent)*. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 2122—2124 (1932).

Anschließend an eine frühere Arbeit (vgl. dies. Zbl. **4**, 33) verfolgt der Verf. hier das Problem weiter, die hydrodynamischen Gleichungen der zähen Flüssigkeit auf das System der Stromlinien und ihrer Orthogonaltrajektorien als Koordinatensystem umzurechnen. Die Komponenten der Reibungskraft $\mu \Delta u$ und $\mu \Delta v$ (μ = Zähigkeit; Δ = Laplacescher Operator; u, v = Geschwindigkeitskomponenten in kartesischen Koordinaten) lassen sich in diesem Koordinatensystem als die Ableitung einer reinen Gleitung und einer Drehbewegung darstellen. Für die Integration der hydrodynamischen Gleichungen folgt aus der Umrechnung keine Vereinfachung. *H. Schlichting.*

Tosini, Angelo: *Sulla velocità del suono nei liquidi contenuti in tubi elastici*. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 97—118 (1932).

Let V be the velocity of sound in an infinite homogeneous isotropic liquid at constant temperature and pressure, U the velocity of sound in the same liquid, of density ρ_0 , when it is inside a thin tube of internal radius a , external radius $b = a(1 + \varepsilon)$ density ρ and elastic constants λ, μ . If $2\theta = 2 - \varepsilon + \varepsilon^2$ the author's new formula for U is

$$[4\mu(\lambda + \mu) - (\lambda + 2\mu)\rho U^2][m^2 a^2 b(V^2 - U^2)U^2 \rho \varepsilon \theta - 4\mu(V^2 - U^2)a \varepsilon \theta + 2\rho_0 b V^2 U^2] \\ = 4a\mu(\lambda + 2\mu - U^2 \rho) \varepsilon \theta [\rho_0 U^2 V^2 - \mu(V^2 - U^2)].$$

With suitable approximations this gives the well known formulas of Korteweg, Lamb, Allievi and Vago for a compressible liquid in a thin tube. Resal's formula for an incompressible fluid is also included. *H. Bateman* (Pasadena).

Dungen, F.-H. van den: *Recherches mathématiques sur l'acoustique des salles*. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **18**, 437—461 (1932).

Verf. behandelt die Akustik großer Räume, insbesondere die Vorgänge während des Nachhalls mit Hilfe der Theorie schwingender kontinuierlicher Systeme mit kleiner Dämpfung. Die erhaltenen Formeln stimmen in der Hauptsache mit aus der Literatur bekannten überein. Für eine ohne Beweis gegebene Behauptung des Verf., daß Weyls asymptotische Eigenwertformeln beim Vorhandensein von Dämpfung nicht gelten, möchte Ref. auf eine Arbeit [Math. Ann. **102**, 671 (1930)] verweisen, wo das Gegenteil dieser Behauptung bewiesen wurde. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Sivian, L. J., and H. T. O'Neil: *On sound diffraction caused by rigid circular plate, square plate and semi-infinite screen*. J. Acoust. Soc. Amer. **3**, 483—510 (1932).

Calculations for the circular plate are made by treating the secondary potential of the disc as if it arose from a like portion of an infinite wall, one surface only being considered. The ratio of the total pressure at a point P to that in the incident wave alone is

$$1 + ik \cos \Phi e^{-ikz} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} e^{-ik(\rho - r \sin \Phi \cos \theta)} \frac{d\rho d\theta}{2\pi}$$

where $R_1 = \sqrt{r^2 + z^2}$. A comparison is made with the experimental values. — For the square plate a graphical method has been found effective. For the semi-infinite screen, Sommerfeld's solution is expressed in a form in which numerical calculations can be made, the method being illustrated by means of examples. *H. Bateman.*

Andree, C. A.: *The effect of position on the absorption of materials for the case of a cubical room*. J. Acoust. Soc. Amer. **3**, 535—551 (1932).

Verf. weist für den Fall eines kubischen Raumes nach, daß bei der Bestimmung der Teilabsorptionskoeffizienten aus der Gesamtschallabsorptionszahl die gebräuchliche Sabinesche Gleichung $E_t = E_0 e^{-tv(Sa)/4V}$ nur dann Gültigkeit hat, wenn die einzelnen absorbierenden Materialien gleichmäßig über die Oberfläche des Raumes verteilt sind. Bei ungleichmäßiger Verteilung muß eine andere, von C. F. Eyring entwickelte Beziehung $E_t = E_0 e^{-tv(-S \log \beta)/4V}$ benutzt werden. Die Werte für β sind für die verschiedenen Fälle der Materialverteilung angegeben. — Die Gültigkeits-

grenzen der beiden Formeln werden diskutiert und an Hand einiger durchgerechneter Beispiele erklärt. — Eine experimentelle Nachprüfung der Rechnung ist nicht durchgeführt. *Schultes* (Darmstadt).

Hall, William M.: Comments on the theory of horns. J. Acoust. Soc. Amer. **3**, 552—561 (1932).

A discussion of the present state of horn theory shows a need of data on the amplitude and phase of the sound pressure in horns at various frequencies, so experiments were made with an exponential horn and a conical horn of the same overall dimensions and information was obtained relating to the shape of the advancing wave front, the distribution of energy and the reaction at the mouth. It has been found that the existing pattern could be approximated very closely by assuming that the major portion of the reflection at the mouth took place at an annular ring around the periphery. It will be seen that the effect is more pronounced in the conical horn than in the exponential, as a result of the greater discontinuity existing at the mouth of the former.

H. Bateman (Pasadena).

Quantentheorie.

Rosenfeld, L.: Über eine mögliche Fassung des Diracschen Programms zur Quantenelektrodynamik und deren formalen Zusammenhang mit der Heisenberg-Paulischen Theorie. Z. Physik **76**, 729—734 (1932).

Der Verf. zeigt, wie es möglich ist, das von Dirac kürzlich entwickelte Programm zu einer Quantenelektrodynamik allgemein durchzuführen in dem von Dirac selbst für den eindimensionalen Fall angedeuteten Sinn. Es ergibt sich hierbei, daß, ungeachtet des verschiedenen Ausgangspunkts, diese Theorie völlig äquivalent wird mit der Heisenberg-Paulischen Quantenelektrodynamik, indem jede Lösung der einen Wellengleichung eindeutig mit einer Lösung der anderen Wellengleichung korrespondiert.

O. Klein (Stockholm).

Pauli, W.: Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik. Helv. physica Acta **5**, 179—199 (1932).

Die Methode von Wentzel und Brillouin wird für die Diracsche relativistische Wellengleichung verallgemeinert, wobei insbesondere näher ausgeführt wird, wie die Spineffekte, wie von Bohr hervorgehoben, in der Diracschen Theorie stets mit den Beugungseffekten zusammen in der „geometrisch-optischen“ Näherung wegfallen. Die Untersuchung wird bei dem eindimensionalen Fall in Einzelheiten durchgeführt und auf den paradoxalen Durchgang von Elektronen gegen die Kraft bei stetig fallendem Potential angewandt, was zu einem allgemeinen Ausdruck für den Durchtrittskoeffizienten führt.

O. Klein (Stockholm).

Infeld, Leopold: Die verallgemeinerte Spinorenrechnung und die Diracschen Gleichungen. Physik. Z. **33**, 475—483 (1932).

Die Spinoranalyse des Ref. wird dadurch verallgemeinert, daß der Tensor

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \quad (\varepsilon^{12} = 1, \varepsilon^{21} = -1, \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0)$$

durch einen beliebigen antisymmetrischen Spintensor $\gamma^{\alpha\beta}$ ersetzt wird, dessen einzige Komponente $\gamma^{12} = -\gamma^{21} = \sqrt{\gamma}$ eine beliebige reelle Ortsfunktion ist. Mit diesem γ -Feld wird ein metrisches Feld

$$\neg g_{44} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\gamma, \text{ übrige } g_{ik} = 0$$

verknüpft. Die Verallgemeinerung der Diracschen Gleichungen auf diesen speziellen Fall der allgemeinen Relativitätstheorie läßt sich dann sehr einfach angeben. In der Wellengleichung 2. Ordnung tritt ein Zusatzglied $\frac{R}{3} \psi^2$ auf, welches mit der Existenz von überall endlichen stationären Lösungen mit der Energie $E = m_0 c^2$ im feldfreien Fall unvereinbar ist, es sei denn, man nimmt in der Gravitationsgleichung $k T = -R$ für k das positive Vorzeichen, entgegen dem in der Relativitätstheorie üblichen, aber

in Übereinstimmung mit einer früheren Arbeit des Verf. „Über die Struktur der Elektronenwelle“ (vgl. dies. Zbl. 3, 93). *van der Waerden* (Leipzig).

Juvet, G.: Sur les méthodes et les problèmes de la mécanique ondulatoire et de la mécanique quantique. (*Ecole d'Ing., Lausanne.*) Rev. gén. Electr. 31, 77—86 u. 112—121 (1932).

Buhl, A.: Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Schrödinger écrite pour le cas d'un seul point. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 2195—2197 (1932).

Mitra, S. K., and Bhabani Charan Sil: On the variation of the resistance of thermionic valves at high frequencies. Philos. Mag., VII. s. 13, 1081—1098 (1932).

Verf. nimmt für die Elektronen zwischen der Anode und dem Gitter in einer Glühkathodenröhre eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung an und betrachtet den Einfluß der Hochfrequenzspannung auf die Bewegung der Elektronen. Es läßt sich eine kritische Geschwindigkeit v_0 definieren von der Beschaffenheit, daß alle Elektronen mit der Anfangsgeschwindigkeit $v \geq v_0$ die Anode erreichen und somit zum Leitvermögen der Glühkathodenröhre beitragen können. Der auf Grund der gemachten Annahmen berechnete Widerstand wird mit dem experimentell ermittelten verglichen, wobei eine befriedigende Übereinstimmung gefunden wird. *V. Fock.*

Wessel, W.: Zur quantentheoretischen Elektrodynamik. Invariante Formulierung der Diracschen Dispersionstheorie. III. Z. Physik 76, 337—367 (1932).

Für die früheren vom Verf. zur Vermeidung der Selbstenergieschwierigkeit gemachten Ansätze wird eine physikalische Deutung gegeben, wobei das Spinnmoment eine wesentliche Rolle spielt. Für die Feldquantelung wird eine neue Form gegeben. Zur Untersuchung der Konvergenz der Eigenwertbestimmung wird die Energie einer ruhenden, geladenen Partikel in den ersten drei Näherungen (hinsichtlich Potenzen von $1/c$) vollständig durchgerechnet. Sie ergibt sich in nullter und erster Näherung gleich mc^2 (unabhängig von der Ladung), eine in zweiter Näherung auftretende Korrektur ist numerisch angebbar. (II. vgl. dies. Zbl. 2, 435.) *Waller* (Upsala).

Rosen, N., and M. S. Vallarta: Relativity and the uncertainty principle. Physic. Rev., II. s. 40, 569—577 (1932).

Die Verff. nehmen die Lorentz-Transformation auch für Atomdimensionen als richtig an und untersuchen mit Hilfe eines „Gedankenexperiments“, wie die Heisenbergsche Unschärferelation aussieht, wenn man die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in Betracht zieht. (Der sonst in der Literatur beschrittene Weg war: die Unschärferelation in der üblichen Form als richtig anzusehen und zu fragen, wie kann man in Atomdimensionen Gleichzeitigkeit usw. definieren?) Das Gedankenexperiment soll sein: Ein Beobachter sendet ein Lichtsignal aus, das ein freies Elektron trifft und dann zum Beobachter zurückkehrt. Lage und Impuls des Elektrons sollen gleichzeitig bestimmt werden. Die Verff. berechnen eine obere und eine untere Grenze für das Produkt der Lage- und Impuls-Unschärfen $\Delta p \Delta x$. Der Wert $\Delta p \Delta x = h$ liegt immer zwischen den beiden Grenzen. Die Möglichkeit einer relativistischen Quantenmechanik, in der die übliche Unschärferelation $\Delta p \Delta x = h$ beibehalten wird, glauben die Verff. damit gezeigt zu haben. *K. Bechert* (München).

Wisniewski, F. J. de: Une remarque relative à la mécanique corpusculaire. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 10, 173—181 (1932).

Mit Hilfe des von Schrödinger zur Ableitung der Wellengleichung eingeführten Variationsverfahrens wird versucht, der Schrödinger-Gleichung eine modifizierte Hamilton-Funktion zuzuordnen, die bei passender Wahl die wellenmechanischen Eigenwerte mittels der Methode der Phasenintegrale liefert. *O. Klein* (Stockholm).

● **Brinkman, H. C.:** Zur Quantenmechanik der Multipolstrahlung. Groningen u. Batavia: P. Noordhoff N. V. 1932. 60 S.

Verf. gibt im ersten Kapitel eine Übersicht über die Gruppeneigenschaften der Wellenfunktionen eines Atoms bei Raumdrehungen des Koordinatensystems und

zeigt, wie man hieraus mit Hilfe einer zuerst von Kramers angegebenen Methode für einen Operator, der invariant ist oder sich in bestimmter Weise transformiert, die Abhängigkeit der Matrixelemente von der „magnetischen“ Quantenzahl erhalten kann. Im zweiten Kapitel folgt eine Erörterung der Lichtemission eines Systems bewegter geladener Teilchen auf klassischer Grundlage. Hierbei ergibt sich in natürlicher Weise durch Entwicklung des Hertzschen Vektors nach umgekehrten Potenzen von c und unter Berücksichtigung der Transformationseigenschaften der einzelnen Glieder eine Zerlegung der Strahlung in elektrische und magnetische Dipol-, Quadrupol- usw. Strahlung. Die Resultate der Kapitel 1 und 2 werden im dritten Kapitel zur Berechnung der relativen Intensitäten von Spektrallinien benutzt, und zwar für die Zeeman-komponenten und die Multiplettkomponenten, sowohl im Falle der Dipol- als auch der Quadrupolstrahlung. Es ergeben sich auf diesem sehr bequemen Wege die schon aus anderen Untersuchungen bekannten Formeln. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Weinstein, D. H.: A lower limit for the ground state of the helium atom. *Physic. Rev.*, II. s. 40, 797—799 (1932).

Es handelt sich um das Problem: Gegeben die Schrödingergleichung $H\psi_n = W_n\psi_n$; eine „angenäherte“ Lösung ξ derselben sei bekannt für den Grundzustand des quantenmechanischen Systems, so daß in $\xi = a_0\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n$ die $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ klein gegen a_0 sind (a_0, ψ_0 beziehen sich auf den Grundzustand, dessen „strenge“ ψ -Funktion ψ_0 sei). Dann gilt

$$J_1 - \frac{A_2}{W_1 - W_0} \leq W_0 \quad (1)$$

mit

$$J_1 = \int \xi H \xi d\tau, \quad A_2 = \int \xi H^2 \xi d\tau - J_1^2;$$

W_0, W_1 sind Grundzustand und nächster Eigenwert des Systems. Anwendung auf das Heliumatom liefert $W_0 \geq -6,2R$ (experimentell $W_0 = -5,818R$). [Dabei setzt der Verf. für $W_1 - W_0$ den experimentellen Wert ein. Allgemein ist zu sagen, daß die Gleichung (1) nicht immer wirklich eine untere Grenze zu liefern braucht; wenn man nämlich $W_1 - W_0$ experimentell nicht kennt, wird man einen theoretischen Näherungswert einsetzen müssen, und wenn dieser zu klein ausfällt, kann offensichtlich (1) falsch werden; Referent.] *Bechert* (München).

Kondratjew, V.: Über die Bildung von Molekülen aus Atomen unter Lichtausstrahlung. *Physik. Z. Sowjetunion* 1, 501—509 (1932).

Bei der Molekülbildung aus 2 freien Atomen muß die Bildungsenergie entweder durch Dreierstoß oder durch Ausstrahlung abgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeit dieses Vorganges steht in einfacher Beziehung zum Absorptionskoeffizienten des gasförmigen Reaktionsproduktes. Eine grobe Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit läßt sich nach der klassischen Statistik als das Verhältnis der Emission eines Oszillators während des Zusammenstoßes zur Emission während unendlich langer Zeit berechnen. Aus der bekannten Wahrscheinlichkeit von Dreierstößen und der Wahrscheinlichkeit der Kombination unter Strahlung wird die relative Häufigkeit beider Vorgänge berechnet. Es ergibt sich — im Einklang mit der Erfahrung —, daß der zweite Vorgang unter den gewöhnlichen Versuchsbedingungen extrem unwahrscheinlich ist. *Eisenschitz*.

Mrowka, Bernhard: Wellenmechanische Berechnung der Polarisierbarkeit des Wasserstoffmoleküls. *Z. Physik* 76, 300—308 (1932).

Die Polarisierbarkeit von H_2 wird theoretisch für die Richtung der Kernverbindungsline und senkrecht dazu berechnet und mit den aus der Dispersionskurve und dem Depolarisationsgrad der molekularen Lichtzerstreuung experimentell ermittelten Werten in guter Übereinstimmung gefunden. *Waller* (Upsala).

Weiler, J.: Ramaneffekt und molekulare Anisotropie. *Physik. Z.* 33, 489—498 (1932).

Dieser zusammenfassende Bericht behandelt die Schlüsse, die aus Ramaneffektmessungen auf die Anisotropie einer Molekel gezogen werden können. Aus den Ramanfrequenzen können Trägheitsmomente bestimmt werden. Aus den Intensitäten und

Polarisationsgraden der Ramanlinien kann man auf Grund einer theoretischen Untersuchung von Manneback auf Eigenschaften des Tensors der optischen Polarisierbarkeit schließen. Hierfür ist die Verteilung der Intensität auf die Rotationslinien wichtig, bei größeren Trägheitsmomenten also die Intensität der unverschobenen Linie und ihrer „Flügel“.

F. Hund (Leipzig).

Stier, H. Chr.: Zur Deutung des Ramsauereffektes bei symmetrischen, zweiatomigen Molekülen. Z. Physik **76**, 439—470 (1932).

Die theoretische Deutung des Ramsauereffektes in Atomen hatte einige bemerkenswerte Ergebnisse geliefert. Die Streuung ließ sich in Teilstreuungen zerlegen, deren Intensität in bestimmter Weise vom Streuwinkel abhing und die den Quantenzahlen l eines Elektrons im Atomfeld entsprachen (Holtmark). Es wurde ferner ein qualitativer Zusammenhang gefunden zwischen dem Verhalten der Eigenfunktionen eines einzelnen Elektrons im Atom und diesen Teilstreuungen. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, ähnliche Gesetzmäßigkeiten zu finden für den Fall einer Molekel, deren Kraftfeld sich durch Annahme der Separierbarkeit der Schrödinger-Gleichung in elliptischen Koordinaten und durch einen „Rand“, also durch

$$U = -\frac{2\xi f(\xi)}{\xi^2 - \eta^2}, \quad f(\xi_0) = 0$$

beschreiben läßt. Auch hier gelingt die Zerlegung in Teilstreuungen entsprechend den Quantenzahlen l und λ . Ihre Winkelabhängigkeit wird untersucht, und es wird ein anschaulicher Zusammenhang hergestellt zwischen ihnen und dem Verhalten der Eigenfunktionen eines Elektrons im Feld der Molekel. Auf Grund dieser Zusammenhänge wird diskutiert, wie aus den empirischen Messungen auf den Anteil der Teilstreuungen geschlossen werden kann. Eine rohe numerische Rechnung erläutert die Verhältnisse an der N_2 -Molekel.

F. Hund (Leipzig).

Hückel, Erich: Quantentheoretische Beiträge zum Problem der aromatischen und ungesättigten Verbindungen. III. Z. Physik **76**, 628—648 (1932).

In gleicher Weise wie früher beim Benzol (vgl. dieses Zbl. **2**, 96, 430) werden die Eigenschaften einer Reihe von Verbindungen, die sich nicht in einfacher Weise durch Valenzstriche schreiben lassen (Ringe $C_n H_n$, Naphtalin, Anthrazen, Diphenyl, Ketten $C_n H_{n+2}$), durch Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen im Kraftfeld der Molekel beschrieben. Es werden soviel Elektronen wie möglich in Einfachbindungen untergebracht gedacht, die übrigen geben nichtlokalisierte Bindungen. Ihre Eigenfunktionen werden unter Benützung der Symmetrien des Kraftfeldes durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen von Elektronen in Atomfeldern angenähert. Die Energie erscheint dann als lineare Funktion gewisser „Coulombscher“ Integrale und gewisser „Resonanz“-integrale; mit einer geringfügigen Vernachlässigung tritt nur ein einziges Resonanzintegral auf. Sein Faktor ist charakteristisch für die Energie. Die Bindungsenergien und Anregungsenergien, sowie die Ladungsdichte in den verschiedenen Molekeln werden so berechnet; es ergeben sich zahlreiche Beziehungen zum chemischen Verhalten.

F. Hund (Leipzig).

Bloch, Léon: Résonance quantique et affinité chimique. Ann. Inst. H. Poincaré **2**, 311—368 (1932).

Bei der Kopplung zweier quantenmechanischer Systeme, die gleiche Energie haben oder bei denen eine Emissionsfrequenz des einen einer Absorptionsfrequenz des anderen gleich ist, tritt ein charakteristisches Resonanz-Phänomen auf. Seine Bedeutung für die Erklärung der chemischen Bindung wird hier zusammenfassend dargestellt. Als Beispiele dienen insbesondere die Berechnung der Terme des He-Atoms (nach Heisenberg) und der tiefen Terme der H_2 -Molekel (nach Heitler und London). Die Verhältnisse in Molekeln, die eine Mittelstellung zwischen homöopolarer und heteropolarer Bindung einnehmen, werden auch am Fall des H_2 erläutert, indem dort die Eigenfunktionen auch unter Zuhilfenahme der Ionen H^+ und H^- angenähert werden. Die Theorie der „Spinvalenz“ wird angegeben, d. h. die Beschränkung auf

die Erscheinungen, die allein von den durch den Spin gegebenen Entartungen der Atomterme herrühren; schließlich folgt eine kurze Diskussion der Einflüsse der übrigen Entartungen, insbesondere die Erklärung der gerichteten Valenz in der von Slater und Pauling zuerst angegebenen qualitativen Form (die ausführliche Arbeit von Slater lag bei Abfassung noch nicht vor). *F. Hund* (Leipzig).

Wigner, E.: On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physic. Rev.*, II. s. 40, 749—759 (1932).

In der klassischen Statistik erfolgt die Berechnung statistischer Mittelwerte derart, daß man die Verteilung der Moleküle im Phasenraum entsprechend der Boltzmann-Formel zugrunde legt, die eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit macht, mit welcher ein Molekül sich an einem bestimmten Orte befindet und eine bestimmte Geschwindigkeit hat. In der Quantentheorie ist es grundsätzlich unmöglich, diese Wahrscheinlichkeit anzugeben. Dagegen läßt sich (bei gegebener Wellenfunktion ψ) eine Funktion definieren, die bei der Berechnung statistischer Mittelwerte dasselbe leistet wie die Boltzmann-Formel in der klassischen Statistik:

$$P(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) = (2/\hbar)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int dy_1 \dots dy_n \psi(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \psi(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) e^{4\pi i(p_1 y_1, \dots, p_n y_n)/\hbar}.$$

Die Funktion P liefert bei Integration über den Impulsraum die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Koordinatenwerte, bei Integration über den Koordinatenraum die Wahrscheinlichkeiten der Impulse. Daraus folgt, daß man mittels der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Verwendung der Funktion P Erwartungswerte beliebiger Funktionen der Impulse und Koordinaten, z. B. der Energie berechnen kann. Weiterhin wird gezeigt, daß die Funktion P einer der klassischen analogen Kontinuitätsgleichung im Phasenraum genügt. Für ein Gemisch mehrerer Zustände wird an Stelle der Funktion P eine Linearkombination der auf die einzelnen Zustände bezüglichen Funktionen P gesetzt. Die weiteren Rechnungen werden unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes mit der Energie E durch $e^{-E/kT}$ gegeben ist. Für kleine Abweichungen von der klassischen Statistik läßt sich dann die Funktion P als Reihe nach \hbar entwickeln:

$$P = e^{-\frac{\epsilon}{kT}} (1 + \hbar^2 g_2 + \hbar^4 g_4 + \dots).$$

Die Entwicklungskoeffizienten erweisen sich als rationale Funktionen der räumlichen Differentialquotienten der potentiellen Energie. Aus dem explizit gegebenen Ausdruck für g_2 werden die quantenstatistischen Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie berechnet; die mittlere kinetische Energie erscheint dabei größer als der klassische Ausdruck. *Eisenschütz* (Berlin).

Oka, Syôten: Das quantitative Grenzgesetz der Oberflächenspannung starker binärer Elektrolyte. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 14, 233—252 (1932).

Es wird eine Berechnung der Oberflächenspannung σ starker Elektrolyte in folgender Weise vorgenommen. Die Lösung wird durch eine Ebene in zwei Teile *I* und *II* zerschnitten, die auf den Abstand x voneinander entfernt werden. Auf Grund der Debye'schen Differentialgleichung der Elektrolyttheorie wird mit den entsprechenden Grenzbedingungen zunächst für diese Anordnung das Potential um ein festgehaltenes Ion in *I* durch Entwicklung nach Besselschen Funktionen bestimmt. Hierbei wird wie im folgenden (ohne daß darauf besonders hingewiesen wird) die charakteristische Länge der Debye'schen Theorie als unabhängig vom Abstand von der Oberfläche angenommen. Dann wird die Gesamtkraft der dieser Potentialverteilung entsprechenden Ionenverteilung berechnet; diese Kraft in Abhängigkeit von x integriert von $x = 0$ bis $x = \infty$ liefert, pro Quadratzentimeter Oberfläche gerechnet die Oberflächenspannung. Die Ausrechnung geschieht durch Näherungsverfahren. Für die Erniedrigung $\Delta\sigma$ von

σ ergibt sich für binäre Elektrolyte: $\Delta\sigma = \frac{N\epsilon^2 z^2 \gamma}{4000 D}$ (N Loschmidtsche Zahl, ϵ Elementarladung, z Wertigkeit der Ionen, γ Konzentration in Mol/Liter, D Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels). Das Ergebnis der Theorie wird an Messungen von σ 2-2-wertiger Elektrolyte bei vom Standpunkt des zugrunde gelegten Grenzesetzes der Debyeschen Theorie relativ hohen Konzentrationen ($\gamma = 0,2$ bis 1 Mol/l) geprüft. Die berechneten Werte sind fast durchgehend etwas größer als die beobachteten, wofür Gründe angegeben werden. Dem Verf. scheint eine Arbeit von Wagner [Physik. Z. 25, 474 (1924)] über denselben Gegenstand entgangen zu sein, welche nach einer anderen Methode für 1-1-wertige Elektrolyte zu Resultaten kommt, die für kleine Konzentrationen nur etwa halb so groß sind wie die sich nach der obigen Formel ergebenden Werte und die außer für Li-Salze mit der Erfahrung gut übereinstimmen. Eine Aufklärung dieser Diskrepanz wäre erwünscht. *E. Hückel* (Stuttgart).

Margenau, Henry: Pressure shift and broadening of spectral lines. (*Sloane Physics Labor., Yale Univ., New Haven.*) Physic. Rev., II. s. 40, 387—408 (1932).

Es wird die druckabhängige Termverschiebung und Termverbreiterung theoretisch untersucht, welche ein in einem artfremden Gas befindliches Atom durch die Einwirkung der Nachbaratome erfährt. Die Wechselwirkung mit den Nachbaratomen erfolgt durch Kräfte von der Art der van der Waalsschen. Im einzelnen wird die Theorie für die Linie 2537 von Hg durchgeführt und mit Messungen von Füchtbauer, Joos und Dinkelacker verglichen. Es ergibt sich insbesondere, daß ein Teil der Linienverbreiterung durch die — statistisch erfolgende — von den Nachbaratomen verursachte Termverschiebung bedingt ist und nicht auf die durch Zusammenstöße hervorgerufene Störung des Absorptions- bzw. Emissionsprozesses selbst zurückzuführen ist. *G. Beck* (Wien).

Fujioka, Y.: Zur Dispersionstheorie im metallischen Leiter. Z. Physik 76, 537 bis 558 (1932).

Im Anschluß an Arbeiten von Kronig (s. dies. Zbl. 2, 373) wird die Dispersion in metallischen Leitern untersucht. Zu dem Zwecke betrachtet Verf. den Einfluß eines mit der Frequenz ν schwingenden elektrischen Feldes auf ein Elektron, das sich in einem dreifach periodischen Potentialfeld befindet, indem er das Elektron als Wellenpaket ansetzt. Für kleine ν ergibt sich im wesentlichen eine Beschleunigung des Elektrons, für große ν dagegen erhält man hauptsächlich Übergänge nach höheren Anregungszuständen, die in einem Metall, wo ja viele Elektronen anwesend sind, kontinuierliche Absorptionsbanden im optischen Spektralgebiet verursachen. Diesen zwei Möglichkeiten entsprechend setzt sich der vom Wechselfelde induzierte Strom aus zwei Teilen zusammen, in Übereinstimmung mit den eingangs erwähnten Untersuchungen. Es wird weiterhin die Wechselwirkung des Elektrons mit den Gitterschwingungen erörtert und wie bei Kronig durch ein Dämpfungsglied berücksichtigt. Der Rest der Arbeit beschäftigt sich mit der Rechtfertigung dieses Ansatzes und mit der Abschätzung der Größenordnung des Dämpfungsgliedes. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Araki, Gentaro: A theory of the rotatory dispersion. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 1, 193—201 (1932).

Verf. behandelt das Problem der optischen Aktivität der Kristalle mit Hilfe des quantenmechanischen Formalismus, ohne jedoch Rücksicht auf die physikalisch notwendigen Voraussetzungen zu nehmen, und deutet als Drehungskoeffizienten einen identisch verschwindenden Ausdruck. *L. Rosenfeld* (Lüttich).

Peierls, R.: Zur Theorie der Absorptionsspektren fester Körper. Ann. Physik, V. F. 13, 905—952 (1932).

Es wird das Termspektrum eines festen Körpers unter Zugrundelegung eines speziellen Modells untersucht, wobei als Ausgangslösung ein aus voneinander unabhängigen Edelgasatomen bestehendes Gitter dient. Je nach den Koppelungsverhältnissen zwischen den Gitterschwingungen und der Elektronenbewegung ergeben sich

für die Lichtabsorption des festen Körpers zwei typische Reaktionsweisen, entsprechend dem Umstand, daß der Körper entweder die absorbierte Energie vorwiegend in Form von (inkohärenter) Fluoreszenzstrahlung wieder emittiert oder in thermische Energie überführt. Für beide Grenzfälle wird die Gestalt des Absorptionsspektrums genauer untersucht, ferner wird die Frage diskutiert, in welcher Weise die Resultate zu verallgemeinern sind, wenn die eingangs zugrunde gelegten vereinfachenden Annahmen nicht zutreffen. Die Theorie steht in guter qualitativer Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden. *G. Beck (Wien).*

Frenkel, J.: Note on a relation between the speed of crystallization and viscosity. *Physik. Z. Sowjetunion* **1**, 498—500 (1932).

Williams, E. J.: The passage of α and β -particles through matter and Born's theory of collisions. *Proc. Roy. Soc. London A* **135**, 108—131 (1932).

Die Bethesche Theorie über den Durchgang von α - und β -Strahlen durch Materie wird mit den experimentellen Resultaten über die Bremsung, Primärisionisation, totale Ionisation und über das „Straggling“ verglichen. Für viele Probleme, so besonders für den Durchgang von langsamen Elektronen durch Wasserstoff ist die Übereinstimmung wesentlich besser als mit den früheren Theorien. Noch nicht zufriedenstellend ist die Übereinstimmung für die totale Ionisation von einatomigen Gasen und für das „Straggling“ in leichten Elementen. — Die Abweichungen, welche sich für schnelle β -Strahlen von den Betheschen Formeln ergeben, sind dem Vorzeichen und der Größenordnung nach mit der zu erwartenden Relativitätskorrektur im Einklang. *G. Beck.*

Williams, E. J.: The loss of energy by fast electric particles. *Physic. Rev.*, **II**, s. **40**, 881—883 (1932).

Es wird die Bremsung und das Ionisierungsvermögen elektrisch geladener Partikeln diskutiert, welche ein Gas nahezu mit Lichtgeschwindigkeit durchsetzen. Verf. schließt aus der von Skobelzyn gemessenen Größe des Ionisierungsvermögens der kosmischen Strahlen, daß dieselben wenigstens zum Teil aus Protonen bestehen, deren Energie mindestens von der Größenordnung 10^9 e-Volt ist. *G. Beck (Wien).*

Mano, G.: Le ralentissement des rayons α dans l'air et la théorie de Bethe. *C. R. Acad. Sci., Paris* **194**, 1813—1815 (1932).

Es wird die von Bethe angegebene Formel

$$-\frac{dv}{dp} = \frac{4\pi e^4 z^2 N Z}{m M v^3} \log \frac{2mv^2}{E}$$

(v = Geschwindigkeit des α -Teilchens, p = Weglänge, N = Anzahl der Atome pro Kubikzentimeter, Z = Ordnungszahl, m = Elektronenmasse, M = Masse des α -Teilchens, E = mittlere Anregungsenergie der gestoßenen Atome) auf die Bremsung von α -Strahlen in Luft angewendet. Es ergibt sich, daß die Bethesche Formel die Bremsung der α -Strahlen im Geschwindigkeitsbereich $v = 2 \cdot 10^9$ cm/sec bis $v = 0,5 \cdot 10^9$ cm/sec sehr genau wiedergibt, wenn man für E den empirisch gewonnenen Wert $E = 92$ e-Volt verwendet. Der theoretisch berechnete Wert $E = 35$ e-Volt ist jedoch nicht im Einklang mit den Beobachtungen. *G. Beck (Wien).*

Blackett, P. M. S.: On the loss of energy of alpha-particles and H-particles. *Proc. Roy. Soc. London A* **135**, 132—142 (1932).

Es werden die empirischen Resultate über die Bremsung von α - und H -Strahlen in Luft, Helium und Wasserstoff mit der Theorie von Bethe verglichen. Die Abhängigkeit der Reichweite von der Geschwindigkeit der Teilchen wird durch die theoretische Formel sehr genau beschrieben, wenn für die mittlere Anregungsenergie (vgl. das vorstehende Referat) ein empirisch errechneter Wert eingesetzt wird. Das abweichende Verhalten bei kleinen Geschwindigkeiten ist wahrscheinlich auf Einfangprozesse von Elektronen zurückzuführen. Auf Grund der theoretischen Extrapolationsformel ist es möglich, auch für schnelle H -Strahlen die Reichweite-Geschwindigkeitsbeziehung anzugeben. *G. Beck (Wien).*